Droites

Table des matières

1 Équation de droite et fonction affine

Dans tout le chapitre, le plan est muni d'un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$

1.1 Relation

Propriété 1.

1. La représentation graphique de la fonction affine $f : x \mapsto ax + b$ est une droite d qui n'est pas parallèle à l'axe des ordonnées.
2. **Réciproquement**, toute droite d non parallèle à l'axe des ordonnées admet une équation du type $y = ax + b$. Cette droite est représente la fonction affine $f : x \mapsto ax + b$ associée.

Remarque. Si $d = (AB)$ n rappelle que le coefficient directeur a vérifie $a = \dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$, et que d passe par $(0, b)$. Autrement dit, l'ordonnée à l'origine b vérifie $b = y_A - ax_A$.

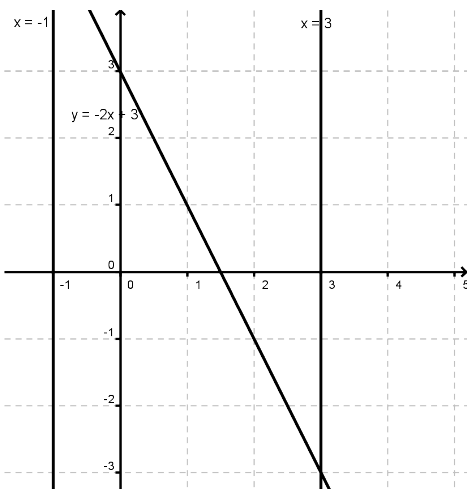
Démonstration.
La première propriété a déjà été démontrée ; prouvons la seconde.
Soit d une droite non parallèle à l'axe des ordonnées ; elle coupe donc l'axe des ordonnées en un point qu'on note A. Les coordonnées de A sont $(0; y_A)$. Il existe un point d'abscisse 1 sur d (pour la même raison). On le note B et ses coordonnées sont $B(1; y_B)$.
Soit f la fonction affine définie par $f(x) = (y_B - y_A)x + y_A$.
Alors $f(0) = y_A$ et $f(1) = y_B - y_A + y_A = y_B$. Autrement dit, la courbe de f est une droite qui contient A et B. C'est la droite $(AB) = d.$!

1.2 Equation réduite

Propriété 2.

1. Une droite d non parallèle à l'axe des ordonnées admet une équation de la forme $y = ax + b$.
2. Une droite d parallèle à l'axe des ordonnées admet une équation de la forme $x = c$.

C'est ce qu'on appelle **l'équation réduite** de la droite d.



1.3 Équation cartésienne

Définition 1. Soit a, b, c trois nombres réels. Une équation du type $ax + by + c = 0$ est une **équation cartésienne**.

Exemple. $4x + 2y - 6 = 0$ est une équation cartésienne. Elle est équivalente à $2y = -4x + 6$ donc à $y = -2x + 3$.

Propriété 3. Toutes les équations cartésiennes $ax + by + c$ ont pour ensemble de solutions $M(x; y)$ des droites du plan. Qui plus est elles peuvent toutes se réduire soit en $y = c$ soit en $y = mx + p$.
Autrement dit, il est toujours possible de **réduire** une équation cartésienne.

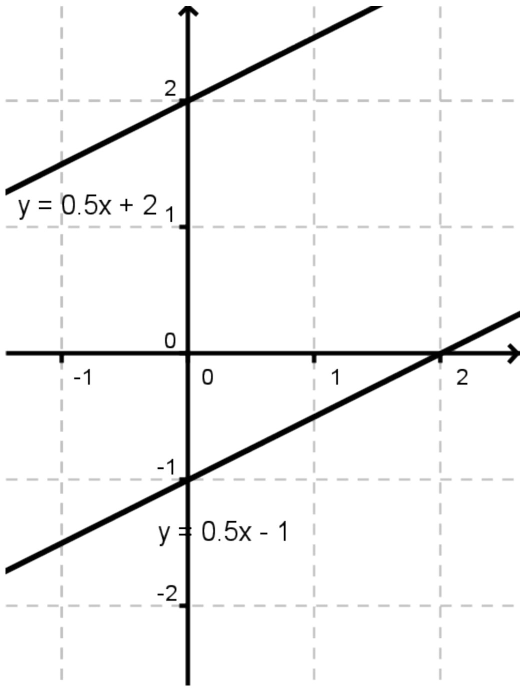
2 Droites parallèles, droites sécantes

2.1 Parallélisme

Théorème 4. Deux droites d et d' d'équations respectives $y = ax + b$ et $y = a' + b'$ sont parallèles si et seulement si $a = a'$.

Autrement dit, elles sont parallèles si et seulement si elles ont le même coefficient directeur.

Exemple. Les droites d et d' d'équations respectives $y = \dfrac{1}{2}x + 2$ et $y = \dfrac{1}{2}x - 1$ sont parallèles.



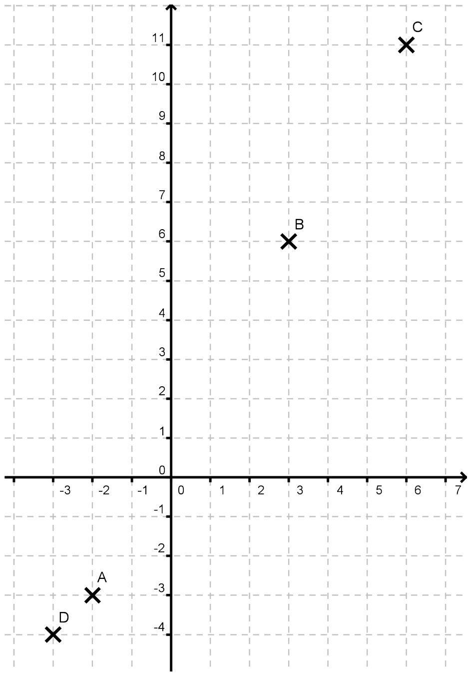
2.2 Alignement

Théorème 5. Trois points A, B et C sont alignés :
— si et seulement si les coordonnées de C vérifient l'équation de (AB)
— si et seulement si (AB) et (AC) ont même coefficient directeur.

Exemple. Soit $A(-2;-3), B(3;6); C(6;11)$ et $D(-3;-4)$

— Les coefficients directeurs de (AB) et (AC) sont : $\dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \dfrac{9}{5}$ et $\dfrac{y_C - y_A}{x_C - x_A} = \dfrac{7}{4}$. Donc A, B et C ne sont pas alignés.

— Les coefficients directeurs de (BC) et (BD) sont égaux à $\dfrac{5}{3}$ donc B, C, D sont alignés.



2.3 Droites sécantes

Dire que deux droites du plan sont sécantes signifie qu'elles ne sont pas parallèles[1]

Si elles ont toutes deux une équation de la forme $y = ax + b$ et $y = a'x + b'$, elles sont sécantes si et seulement si $a' \neq a'$.

Chercher le point d'intersection de d et d' c'est chercher le point qui vérifie les deux équations à la fois.

3 Systèmes de deux équations à deux inconnues

3.1 Introduction

Un système d'équations est une série équations délimitées par une accolade $\{$

Une solution doit vérifier toutes les équations à la fois.

Résoudre un tel système c'est en donner toutes les solutions.

Par exemple, le système :

$$\begin{cases} x + y &= 7 \\ x - y &= 1 \end{cases}$$

a deux équations $L1$ et $L2$ et deux inconnues x et y.

Les équations étant affines, on dira que c'est un **système linéaire de deux équations à deux inconnues.**

On peut remarquer que $(x = 4; y = 3)$ est une solution du système car ces nombres vérifient les deux équations à la fois.

Par contre $(x = 6; y = 1)$ ne vérifie que $L1$ et n'est pas une solution du système.

Exemple. Système linéaire de 3 équations à 3 inconnues.

$$\begin{cases} 3x + 2y - z &= 5 \\ x - 2y + 3z &= 4 \\ 3x + 4y - 7z &= 1 \end{cases}$$

Système de 2 équations à 2 inconnues mais non linéaire.

$$\begin{cases} x^2 + y^2 &= 4 \\ x - y &= 1 \end{cases}$$

Remarque. En seconde on résout les systèmes linéaires de deux équations à deux inconnues.

1. Est-ce toujours si simple ?

3.2 Définition

Un **système de deux équations à deux inconnues** (S) est donné par deux équations à deux inconnues du type :

$$(S) : \left\{ \begin{array}{rcl} ax + by & = & c \\ a'x + b'y & = & c' \end{array} \right.$$

où a, b, c, a', b', c' sont des nombres fixés.

3.3 Nature des solutions

Théorème 6. Soit

$$(S) : \left\{ \begin{array}{rcl} ax + by & = & c \\ a'x + b'y & = & c' \end{array} \right.$$

Un système de deux équations à deux inconnues.
Il peut se représenter comme la recherche du point d'intersection des droites $d1$ et $d2$ d'équations cartésiennes : $ax + by = c$ et $a'x + b'y = c'$.

Il y a donc trois cas de figure :
- Si $d1$ et $d2$ sont sécantes en $P(x_P, y_P)$ alors (x_P, y_P) est l'unique solution du système.
- Si $d1$ et $d2$ sont strictement parallèles alors le système n'a pas de solution.
- Si $d1$ et $d2$ sont confondues alors toute la droite $d1$ est solution.

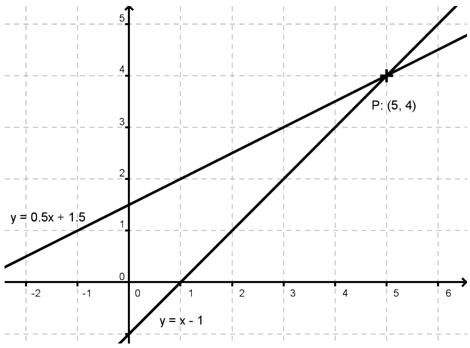
3.4 En pratique : graphiquement

Exemple. Résoudre graphiquement le système

$$\left\{ \begin{array}{rcl} 2x - 4y & = & -6 \\ -x + y & = & -1 \end{array} \right.$$

Solution.

1. On réduit chaque équation. $2x - 4y = -6$ se réduit en $y = \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$ et $-x + y = -1$ en $y = x - 1$. Elles n'ont pas le même coefficient directeur.
   Résoudre le système revient à trouver le point d'intersection de ces deux droites **sécantes.**
2. On trace les droites $d1$ et $d2$ dans le même repère.
3. Leur point d'intersection $P(5; 4)$ nous donne la solution du système : $x = 5; y = 4$.



3.5 En pratique : algébriquement

Exemple. Résoudre par le calcul le système

$$\left\{ \begin{array}{rcl} 2x - 4y & = & -6 \\ -x + y & = & -1 \end{array} \right.$$

Il existe deux méthodes pour résoudre les systèmes d'équations linéaires.

Par combinaison linéaire.
On multiplie chaque membre de $L2$ par 2 pour faire apparaître des coefficients se correspondant en x.

$$\left\{ \begin{array}{rcl} 2x - 4y & = & -6 \\ -x + y & = & -1 \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{rcl} 2x - 4y & = & -6 \\ -2x + 2y & = & -2 \end{array} \right.$$

On ajoute ensuite $L1$ et $L2$ afin de faire disparaître les termes en x.

$$\iff \left\{ \begin{array}{rcl} 2x - 4y & = & -6 \\ -2y & = & -8 \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{rcl} 2x - 4y & = & -6 \\ y & = & 4 \end{array} \right.$$

On remplace ensuite $y = 4$ dans $L1$ et il vient :

$$\iff \left\{ \begin{array}{rcl} x & = & 5 \\ y & = & 4 \end{array} \right.$$

L'unique solution du système est bien $(5;4)$

Par substitution.
Nous allons isoler la variable y dans l'équation la plus simple, $L2$.

$$\left\{\begin{array}{rcl} 2x-4y & = & -6 \\ -x+y & = & -1 \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} 2x-4y & = & -6 \\ y & = & x-1 \end{array}\right.$$

On remplace ensuite y par $x+1$ dans $L1$. On obtient alors une équation d'une seule variable qu'on peut résoudre.

$$\Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} 2x-4(x-1) & = & -6 \\ y & = & x-1 \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} -2x+4 & = & -6 \\ y & = & x-1 \end{array}\right.$$

On résout alors cette équation en x et on remplace enfin dans $L2$ pour obtenir y.

$$\Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} x & = & 5 \\ y & = & 4 \end{array}\right.$$

L'unique solution du système est bien $(5;4)$