Vecteurs, seconde partie

Table des matières

1 Produit d'un vecteur par un nombre réel

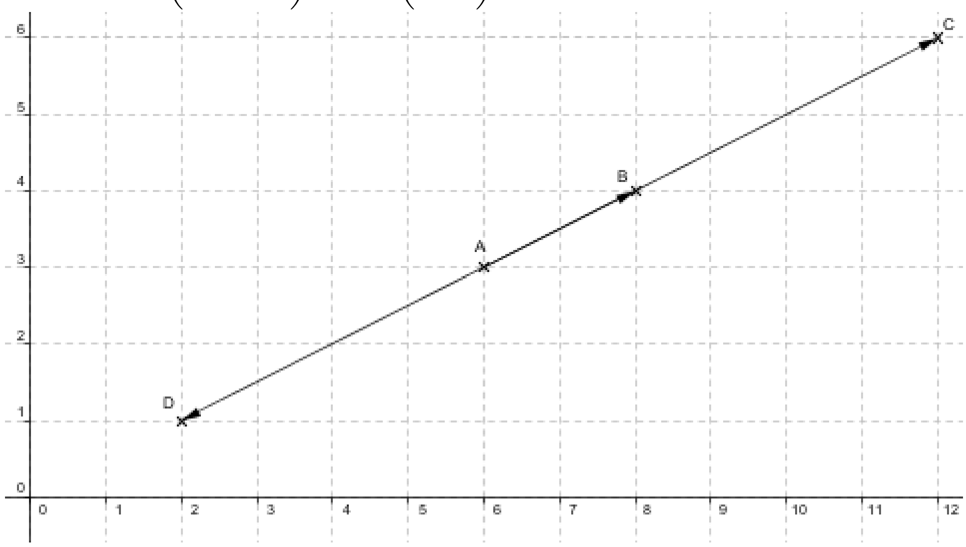
1.1 Définition

Soit $\overrightarrow{u}$ un vecteur et k un nombre réel, si $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ dans un repère, le vecteur noté $k\overrightarrow{u}$ est le vecteur de coordonnées $k\overrightarrow{u}\begin{pmatrix} kx \\ ky \end{pmatrix}$

1.2 Exemple

Soit $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ et les points C et D tels que $\overrightarrow{AC} = 3\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD} = -2\overrightarrow{AB}$.

- $3\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 3 \times 2 \\ 3 \times 1 \end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} 6 \\ 3 \end{pmatrix}$
- $-2\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} -2 \times 2 \\ -2 \times 1 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AD}\begin{pmatrix} -4 \\ -2 \end{pmatrix}$



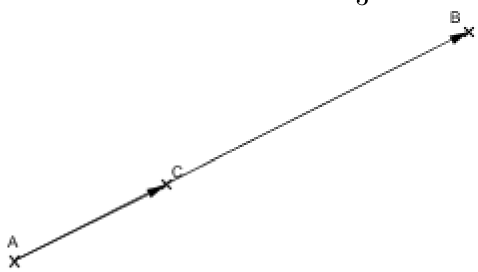
1.3 Propriétés

Si k et k' sont deux nombres réels et $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs, alors :

- $(k + k')\overrightarrow{u} = k\overrightarrow{u} + k'\overrightarrow{u}$
- $k(k'\overrightarrow{u}) = (kk')\overrightarrow{u}$
- $k(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}) = k\overrightarrow{u} + k\overrightarrow{v}$

1.4 Exemple

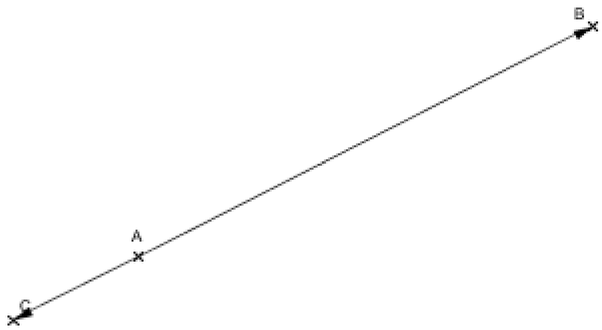
- $-\overrightarrow{u} - \overrightarrow{u} = -2\overrightarrow{u}$
- $\overrightarrow{AB} = 3\overrightarrow{AC}$ revient à $\overrightarrow{AC} = \dfrac{1}{3}\overrightarrow{AB}$



De façon générale, à l'aide de ces propriétés, on peut construire géométriquement le vecteur $k\overrightarrow{AB}$.

1.5 Construction

- Si $\overrightarrow{AC} = k\overrightarrow{AB}$ avec $k > 0$:
  $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont de même sens.
  $AC = k \times AB$
- Si $\overrightarrow{AC} = k\overrightarrow{AB}$ avec $k < 0$:
  $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont de sens opposés.
  $AC = -k \times AB$



2 Vecteurs colinéaires et application en géométrie

2.1 Vecteurs colinéaires

Deux vecteurs sont colinéaires si l'un est le produit de l'autre par un réel.

2.2 Exemple

$\overrightarrow{u}\begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix} -3 \\ 6 \end{pmatrix}$ sont colinéaires car $\overrightarrow{v} = -\dfrac{3}{2}\overrightarrow{u}$.
Le vecteur $\overrightarrow{0}$ est colinéaire à tous les autres vecteurs car $\overrightarrow{0} = 0\overrightarrow{u}$

2.3 Théorème et définition

Dans un repère, les vecteurs $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ sont colinéaires

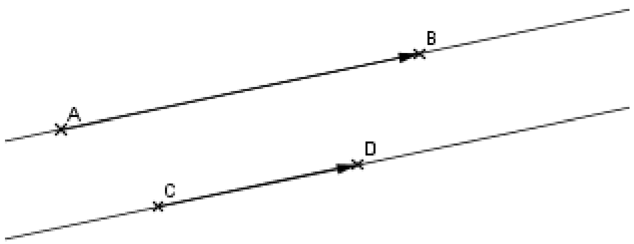
- si et seulement si leurs coordonnées sont proportionnelles.
- si et seulement si $xy' - x'y = 0$.

La quantité $xy' - x'y$ est le **déterminant** du couple de vecteurs vecteurs $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$.

2.4 Application en géométrie

2.4.1 Parallélisme

Deux droites (AB) et (CD) sont parallèles si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires.



2.4.2 Alignement

Trois points P, Q et R sont alignés si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{PQ}$ et $\overrightarrow{PR}$ sont colinéaires.

2.5 Exemple

Soit $A(2, -1)$ et $B(-3, 1)$ dans un repère. Un point $M(x, y)$ appartient à (AB) si et seulement si $\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix} x-2 \\ y+1 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} -5 \\ 2 \end{pmatrix}$ sont colinéaires.

Donc $M(x, y)$ appartient à (AB) si et seulement si $(x-2) \times 2 - (y+1) \times (-5) = 0$ qui devient $y = -\frac{2}{5}x - \frac{1}{5}$.
On retrouve ainsi une équation de la droite (AB).