

Calcul littéral

Table des matières

1	Égalité « pour tout x » et équation	1
2	Développer, factoriser	1
3	Factoriser en pratique	3
4	Résoudre algébriquement une équation	4

1 Égalité « pour tout x » et équation

1.1 Égalité « pour tout x »

Un nombre possède plusieurs écritures.

Par exemple : $0,5 = \frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{50}{100}$. Ce sont différentes écritures d'un même nombre.

De mêmes plusieurs expressions algébriques peuvent correspondre à la même fonction.

— Quelle que soit la valeur par laquelle on remplace x dans les expressions

$$(x - 3)(x + 1) - 5, \quad x^2 - 2x - 8, \quad (x - 4)(x + 2)$$

on obtient le même résultat.

— On écrit : **pour tout x réel**, $(x - 3)(x + 1) - 5 = x^2 - 2x - 8 = (x - 4)(x + 2)$.

— Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par $f(x) = (x - 3)(x + 1) - 5$.

On a aussi $f(x) = x^2 - 2x - 8$ et $f(x) = (x - 4)(x + 2)$ **pour tout réel x** .

— Pour calculer des images ou des antécédents par f , pour étudier des propriétés de f on peut utiliser l'une ou l'autre de ces expressions, **la mieux adaptée**.

1.2 Exemple

— On calcule facilement $f(0)$ avec $x^2 - 2x - 8$.

$$f(0) = 0 - 0 - 8 = -8$$

1.3 Équation

Les expressions $2x - 1$ et $x^2 - 4$ ne sont pas égales pour toutes valeurs de x .

Par exemple, pour $x = 0$; $2x - 1$ prend la valeur -1 tandis que $x^2 - 4$ prend la valeur -4 .

En revanche, pour $x = 3$, on a $2x - 1 = 5$ et $x^2 - 4 = 5$.

— Quand x prend la valeur 3 , on a bien l'égalité $2x - 1 = x^2 - 4$:

On dit que 3 est **solution de l'équation** $2x - 1 = x^2 - 4$.

— **Résoudre une équation** c'est chercher **toutes** les solutions de cette équation.

2 Développer, factoriser

Développer une expression c'est l'écrire sous la forme d'une somme.

Factoriser une expression c'est l'écrire sous la forme d'un produit.

2.1 Distributivité

pour tous réels k, a, b, c, d :

— **simple distributivité**

$$k \times (a + b) = k \times a + k \times b$$

— **double distributivité**

$$(a + b) \times (c + d) = a \times c + a \times d + b \times c + b \times d$$

2.2 Identités remarquables

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \quad (1)$$

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2 \quad (2)$$

$$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2 \quad (3)$$

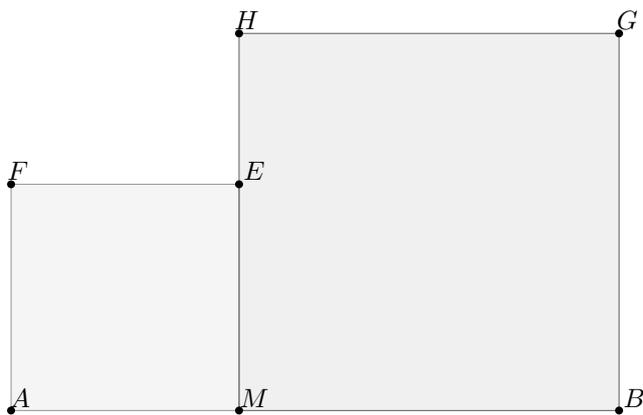
Attention, il ne faut pas confondre :

$$(3x)^2 = 3^2 \times x^2 \quad \text{et} \quad (3 + x)^2 = 9 + 6x + x^2$$

D'ailleurs, $(3 + x)^2 \neq 9 + x^2$!

2.3 Application : développer puis choisir la bonne forme

Énoncé $AB = 8$ et M appartient à AB . $AMEF$ et $MBGH$ sont des carrés. On pose $x = AM$ avec $x \in [0; 8]$.



1. Vérifier que l'aire totale est $A(x) = x^2 + (8 - x)^2$
2. Démontrer que, pour tout x de $[0; 8]$, $A(x) = 2x^2 - 16x + 64$ puis que $A(x) = 32 + 2(x - 4)^2$.
3. Calculer $A(4)$ puis montrer que $A(x) \geq A(4)$ pour tout x de $[0, 8]$.
Interpréter ce résultat en terme d'aire.

Solution

1. L'aire du carré $AMEF$ est x^2 . La longueur MB vaut $AB - MN = 8 - x$ donc l'aire de $MBGH$ est $(8 - x)^2$.
Il vient $A(x) = x^2 + (8 - x)^2$.
2. Développons l'expression $A(x)$.
On utilise la seconde identité remarquable et il vient, pour tout x de $[0, 8]$:

$$\begin{aligned} A(x) &= x^2 + (8 - x)^2 \\ &= x^2 + 8^2 - 2 \times 8 \times x + x^2 \\ &= 2x^2 - 16x + 64. \end{aligned}$$

De même, pour tout x de $[0; 8]$,

$$\begin{aligned} 32 + 2(x - 4)^2 &= 32 + 2(x^2 - 8x + 16) \\ &= 2x^2 - 16x + 64. \end{aligned}$$

On retrouve la même expression donc, pour tout x de $[0; 4]$, $A(x) = 32 + 2(x - 4)^2$.

3. Utilisons la dernière expression de $A(x)$.
 $A(4) = 32 + (4 - 4)^2 = 32$.
Un carré est toujours positif donc $2(x - 4)^2$ l'est.
On en déduit que $32 + 2(x - 4)^2 \geq 32$ donc que $A(x) \geq A(4)$ pour tout x de $[0; 8]$.
L'aire est minimale quand $x = 4$ donc quand M est milieu de $[AB]$.

3 Factoriser en pratique

3.1 Méthode

Pour factoriser une expression « à la main » on analyse sa structure et on se pose un certain nombre de questions.

- Q1** : Est-ce une somme (ou une différence) ? De combien de facteurs ?
Q2 : Chaque terme est-il un produit ? Ou peut-il être écrit comme un produit ?
 Quels sont les facteurs de chaque terme ? Y-a-t-il un facteur commun ?
Q3 : Sinon, peut-on utiliser une identité remarquable ?
Q4 : Sinon, peut-on factoriser une partie de l'expression pour faire apparaître un facteur commun ou une identité remarquable ?
Q5 : Sinon on développe en espérant pouvoir factoriser ensuite.

3.2 Exemples

3.2.1 Exemple 1

Factoriser $f(x) = (x + 1)(2x - 3) + 4(x + 1)$.

- Q1** : Cette expression est la somme de deux termes.
Q2 : Chaque terme est un produit de deux facteurs.
Q2 : $(x + 1)$ est un facteur commun aux deux termes.
Q2 : On factorise : $f(x) = (x + 1) \times [(2x - 3) + 4]$.
Q2 : On réduit le second facteur : $f(x) = (x + 1)(2x + 1)$, pour tout x .

3.2.2 Exemple 2

Factoriser $g(x) = 16x^2 - (x + 1)^2$

- Q1** : C'est la différence de deux termes.
Q2 : Les termes sont des produits sans facteur commun.

Q3 : On a une différence de deux carrés $a^2 - b^2$: $g(x) = (4x)^2 - (x+1)^2$

On utilise $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$.

On factorise $g(x) = [4x - (x+1)][4x + (x+1)]$ et on réduit chaque facteur.

Pour tout x ,

$$g(x) = (3x - 1)(5x + 1),$$

3.2.3 Exemple 3

Factoriser $h(x) = x^2 - 9 + 3(x - 3)$.

Q1, Q2, Q3 : $h(x)$ est une somme de trois termes, on ne voit ni facteur commun, ni identité remarquable.

Q4 : On peut factoriser $x^2 - 9 = (x - 3)(x + 3)$.

Cela fait apparaître $x - 3$ comme facteur commun : $h(x) = (x - 3)(x + 3) + 3(x - 3)$.

On factorise : $h(x) = (x - 3) \times [(x + 3) + 3]$.

On réduit : $h(x) = (x - 3)(x + 6)$, pour tout x .

3.3 Exercice

Factoriser :

— $f(x) = 4x^3 - x$.

— $g(x) = (x + 1)(x - 4) + 3x + 3$

— $h(x) = 2x^2 - 20x + 50$.

— $k(x) = 9x^2 - 12x + 4$.

3.4 Remarque

— Certaines expressions **ne peuvent pas se factoriser**. C'est le cas de $x^2 + 1$. Il **n'existe pas** de meilleure « factorisation » de cette expression avec des coefficients réels.

— Parfois, une meilleure factorisation **existe**, mais **les méthodes vues précédemment ne permettent pas de l'obtenir**.

Par exemple, si on part de $f(x) = x^2 - 8x + 41$, aucune des méthodes précédentes ne permet d'aboutir...

Mais, si on part d'une autre écriture de $f(x) = (x - 4)^2 - 25$, on peut factoriser en utilisant $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$ et écrire : $f(x) = (x - 4 - 5)(x - 4 + 5)$, qui devient $f(x) = (x - 9)(x + 1)$.

— Une méthode générale pour factoriser les expressions du second degré sera présentée en seconde et est au programme de première.

Il est toujours possible d'utiliser un **logiciel de calcul formel** pour obtenir les factorisations... quand elles existent !

4 Résoudre algébriquement une équation

4.1 Equations équivalentes

Deux équations sont dites **équivalentes** quand elles sont les mêmes solutions.

Résoudre :

$$2(x + 3) - 4 = 5x - 1$$

$$\Leftrightarrow 2x + 2 = 5x - 1$$

$$\Leftrightarrow 2x - 5x = -1 - 2$$

$$\Leftrightarrow -3x = -3$$

$$\Leftrightarrow x = 1.$$

Cette équation a pour unique solution $x = 1$.

4.2 Propriété

Pour transformer une équation en une équation équivalent, on peut utiliser les propriétés suivantes :

- Développer, factoriser, réduire certains termes
- Ajouter ou soustraire un même nombre à chaque membre de l'équation
- Multiplier ou diviser chaque membre par un même nombre **non nul**.

4.3 Degré de l'équation

Premier degré Les équations du premier degré sont celles qui peuvent s'écrire sous la forme $ax + b = cx + d$ où a, b, c, d sont des réels. L'exemple est une équation du premier degré.

Elles se résolvent directement en appliquant les transformations ci-dessus.

Autres équations

- Si après développement l'équation est équivalente à une équation du premier degré, on applique la méthode précédente.
- Sinon, on transforme l'équation pour obtenir un second membre nul et on factorise pour pouvoir appliquer l'un des résultats suivants :

4.4 Propriétés

• Théorème du produit nul.

Un **produit** de facteur est nul si l'un de ses facteurs est nul.

$$P \times Q = 0 \quad \text{si et seulement si} \quad P = 0 \text{ ou } Q = 0.$$

• Théorème du quotient nul.

Un **quotient** de facteur est nul si le numérateur est nul et le **dénominateur est non nul**.

$$\frac{P}{Q} = 0 \quad \text{si et seulement si} \quad P = 0 \text{ et } Q \neq 0.$$

4.5 Exercice

Résoudre graphiquement puis par le calcul :

1. (E_1) $3x^2 + 3x - 2 = -x - 2$
2. (E_2) $(x - 1)^2 + 3x = x^2 - 1$