Repérage et Vecteurs

Table des matières

1 Repères et coordonnées

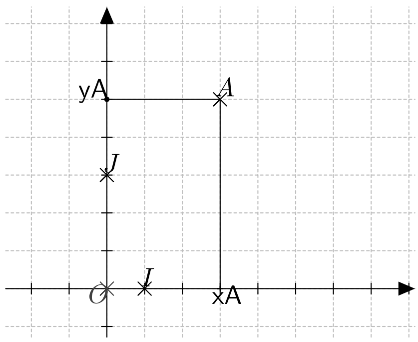
1.1 Repères du plan

Dans le plan, trois points non alignés O, I et J déterminent un repère (O, I, J).
Dans ce repère, tout point M du plan est repéré son couple de coordonnées $(x; y)$.

1.2 Trois types de repères

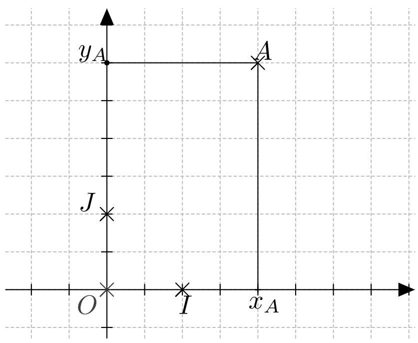
1.2.1 Orthogonal

Définition 1. Si (OI) est perpendiculaire à (OJ) on dit que le repère (O, I, J) est **orthogonal.**



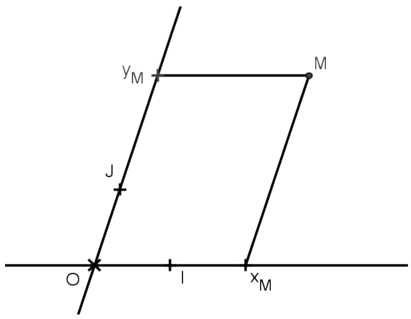
1.2.2 Orthonormé

Définition 2. Si (OI) est perpendiculaire à (OJ) et que $OI = OJ$ on dit que le repère (O, I, J) est **orthonormé**.



1.2.3 Quelconque

Définition 3. Sinon, le repère est dit **quelconque**.



1.2.4 Propriétés communes à tous les repères

Propriété 1.
Dans n'importe quel type de repère (O, I, J) on a :
- Les coordonnées : $O(0;0), I(1;0)$ et $J(0;1)$.
- Deux points qui ont les mêmes coordonnées sont confondus.

1.3 Milieu d'un segment

Théorème 2. Dans le repère (O, I, J), soit $A(x_A, y_A)$ et $B(x_B, y_B)$.
Le milieu K du segment $[AB]$ a pour coordonnées

$$K\left(\frac{x_A + x_B}{2}; \frac{y_A + y_B}{2}\right).$$

Cette formule est valable dans **tout type de repère**.

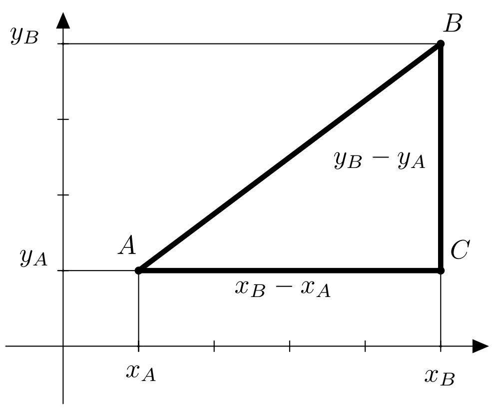
Exemple. Soit $A(-2;3)$ et $B(4;2)$ alors $x_K = \dfrac{-2+4}{2} = 1$ et $y_K = \dfrac{3+2}{2} = \dfrac{1}{2}$.

Remarque. Le milieu K est le « point moyen »de A et B.
Son abscisse est la **moyenne des abscisses**, son ordonnée est la **moyenne des ordonnées**.

1.4 Distance en repère orthonormé

Théorème 3. Dans un repère **orthonormé**, soit $A(x_A, y_A)$ et $B(x_B; y_B)$.
La **distance** AB est donnée par

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}.$$



Exercice 1. Soit $A(1;-2)$ et $B(4;2)$ démontrer que B appartient au cercle de centre A et de rayon 5.
Contrôler le résultat sur une figure.
Solution B appartient au cercle de centre A et de rayon 5 si $AB = 5$.
D'après la propriété, $AB\sqrt{(4-1)^2 + (2+2)^2} = \sqrt{9+16} = 5$.
Par suite, B appartient au cercle.

Démonstration. *Distance en repère orthonormé*
La preuve s'appuie sur le théorème de **Pythagore**.

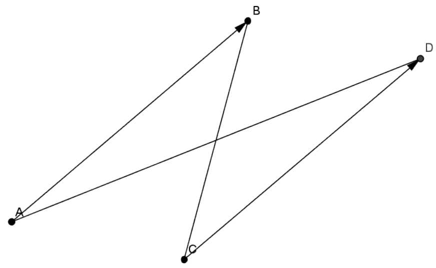
Considérons le point $C(x_B; y_A)$. On suppose $x_A \neq x_B$ et $y_A \neq y_B$.
Les axes du repères sont perpendiculaires donc le trianble ABC est **rectangle** en C.
D'après le théorème de Pythagore, $AB^2 = AC^2 + BC^2$.
Or $AC = x_B - x_A$ ou $x_A - x_B$, dans tous les cas $AB^2 = (x_A - x_B)^2$
De même $BC^2 = (y_B - y_A)^2$.
Le repère étant orthonormé, $AB^2 = (x_A - x_B)^2 + (y_B - y_A)^2$ donc
$AB = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_B - y_A)^2}$.
On vérifie que la formule reste vraie si $x_A = x_B$ ou si $y_A = y_B$.

□

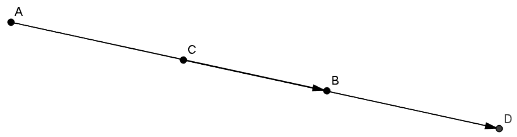
2 Translation et vecteurs

2.1 Vecteurs du plan

Définition 4. Soient A et B deux points du plan. À tout point C du plan on associe l'unique point D tel que $[AD]$ et $[BC]$ aient le même milieu.
On dit que D est image de C par la translation qui envoie A sur B.

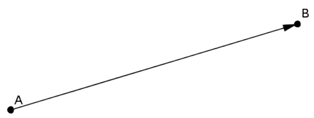


Si C n'est pas aligné avec A et B.
D est l'unique point tel que $ABDC$ soit un parallélogramme.



Si C est aligné avec A et B
Le parallélogramme $ABDC$ est aplati.

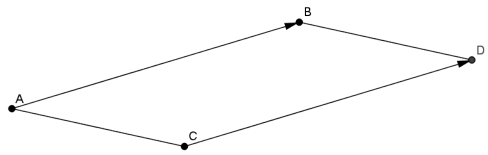
Remarque. La translation qui envoie A sur B est aussi appelée la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$.
Si $A \neq B$, on représente le vecteur $\overrightarrow{AB}$ par une flèche d'origine A et d'extrémité B.



Visuellement, ce vecteur donne l'idée d'un déplacement : Il en indique
- la direction, celle de la droite (AB),
- le sens, de A vers B,
- et la longueur AB.

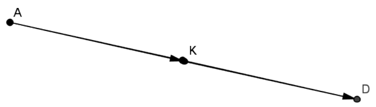
2.2 Egalité de deux vecteurs.

Propriété 4. Dire que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ signifie que D est l'image de C par la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$.
Autrement dit
- $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ si et seulement si $[AD]$ et $[BC]$ ont même milieu.
- $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ si et seulement si $ABDC$ est un parallélogramme.



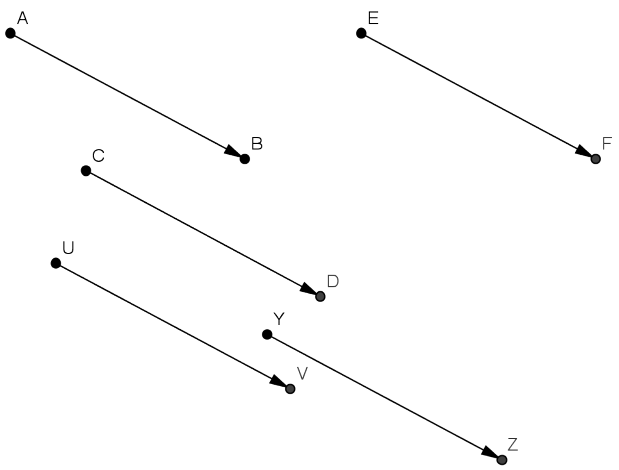
Remarque.
- Visuellement, $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont égaux s'ils donnent l'idée du même déplacement. Les translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$ et de vecteur $\overrightarrow{CD}$ sont identiques.
- Si $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC}$ alors $B = C$.

Propriété 5. Le point I est milieu de $[AB]$ si et seulement si, $\overrightarrow{AK} = \overrightarrow{KB}$.



2.3 Représentant d'un vecteur, vecteur nul, opposé d'un vecteur

Définition 5. Représentant
Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ peut être représenté à partir de n'importe quel point. Partant du point C on aura $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$.
On peut le représenter avec une seule lettre $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{EF} = \cdots$.
On dit que $\overrightarrow{AB}$ est le représentant de $\overrightarrow{u}$ d'origine A, $\overrightarrow{EF}$ celui d'origine E, etc.



Définition 6. Vecteur nul
Si $A = B$ le déplacement de A vers B est considéré comme nul. On note $\overrightarrow{AA} = \overrightarrow{BB} = \overrightarrow{0} = \cdots$

Définition 7. Opposé d'un vecteur
Le vecteur $\overrightarrow{BA}$ et le vecteur $\overrightarrow{AB}$ sont opposés.
On note $\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB}$.
$\overrightarrow{BA}$ et $\overrightarrow{AB}$ ont la même direction et la même longueur mais des sens opposés.
La translation de vecteur $\overrightarrow{BA}$ est la *translation réciproque* à celle de vecteurs $\overrightarrow{AB}$.

2.4 norme d'un vecteur

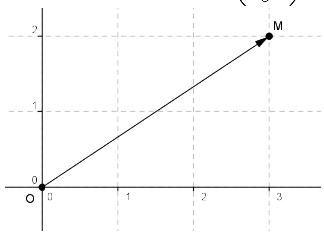
Définition 8. La norme du vecteur $\overrightarrow{AB}$ est la longueur AB. On la note $\left\|\overrightarrow{AB}\right\|$.

Propriété 6. Deux vecteurs sont égaux s'ils ont : même direction, même sens et même norme.
Ainsi, $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ si et seulement si,
• $(AB)//(CD)$, • $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ ont même sens • $AB = CD$

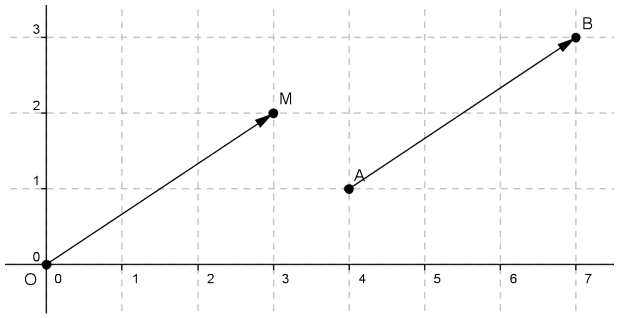
3 Coordonnées d'un vecteur, base d'un repère

3.1 Coordonnées d'un vecteur

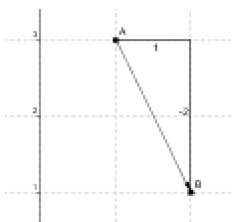
Définition 9. Dans un repère les coordonnées d'un vecteur $\overrightarrow{u}$ sont les coordonnées du point M tel que $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{u}$:
Si $M(x, y)$ on note $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ les coordonnées de $\overrightarrow{u}$.



Propriété 7. Dans un repère, si $A(x_A, y_A)$ et $B(x_B, y_B)$, le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées : $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}$



Exemple. • Si $A(1;3)$ et $B(4, -1)$ on obtient $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 4-1 \\ 3-(-1) \end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$.



• Dans le repère (O, I, J), on a $\overrightarrow{OI}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{OJ}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

• Le vecteur $\overrightarrow{0}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Démonstration. Les coordonnées de $\overrightarrow{AB}$ sont les coordonnées (x, y) du point M tel que $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{AB}$.
Alors $[OB]$ et $[AM]$ ont même milieu.
Les coordonnées du milieu de $[OB]$ sont $\left(\frac{x_B}{2}, \frac{y_B}{2}\right)$ et celles du milieu de $[AM]$ sont $\left(\frac{x_A + x}{2}, \frac{y_A + y}{2}\right)$.
Donc $\frac{x_A + x}{2} = \frac{x_B}{2}$ et $\frac{y_A + y}{2} = \frac{y_B}{2}$.
D'où $x = x_B - x_A$ et $y = y_B - y_A$. □

Propriété 8. Deux vecteurs du plan sont égaux si, et seulement s'ils ont les mêmes coordonnées dans un repère du plan.

3.2 Base d'un repère

Définition 10. Deux vecteurs $\overrightarrow{i}$ et $\overrightarrow{j}$ forment une base s'ils ne sont pas portés par des droites parallèles.

Remarque. On dira plus tard que deux vecteurs *portés par des droites parallèles* sont *colinéaires*.

Définition 11. Base d'un repère
La *base* du repère (O, I, J) est le couple $\left(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$ où $\overrightarrow{i} = \overrightarrow{OI}$ et $\overrightarrow{j} = \overrightarrow{OJ}$.

Remarque. Comme pour le repères, on distingue trois types de bases :
- base orthogonale quand les vecteurs $\overrightarrow{i}$ et $\overrightarrow{j}$ sont portés par des droites perpendiculaires,
- base orthonormée quand la base est orthogonale et que $\overrightarrow{i}$ et $\overrightarrow{j}$ ont la même norme,
- base quelconque dans tous les autres cas.

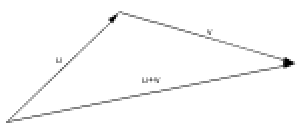
Remarque. On note généralement le repère $O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}$.

Propriété 9. Coordonnée d'un point dans une base repérée.
Si les coordonnées du point M sont (x, y) on a $\overrightarrow{OM} = x\overrightarrow{i} + y\overrightarrow{j}$.

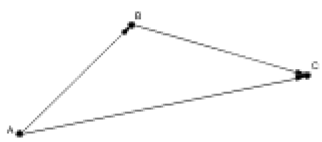
4 Somme de deux vecteurs

4.1 Relation de Chasles

Définition 12. En enchaînant la translation de vecteur $\overrightarrow{u}$ et celle du vecteur $\overrightarrow{v}$ on obtient une nouvelle translation. Le vecteur qui lui est associé est appelé la somme des vecteurs $\overrightarrow{u}$ et du vecteur $\overrightarrow{v}$ et est noté $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}$.
L'ordre n'a pas d'importance, autrement dit $\overrightarrow{v} + \overrightarrow{u} = \overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}$. On peut enchaîner trois vecteurs et le vecteur qu'on obtient est $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} + \overrightarrow{w}$.



Propriété 10. Relation de Chasles.
Pour tous points du plan A, B et C :
$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$.



4.2 Coordonnées de la somme de deux vecteurs

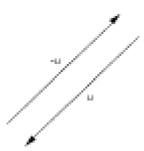
Propriété 11. Dans un repère du plan, si $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ alors $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}\begin{pmatrix} x + x' \\ y + y' \end{pmatrix}$

4.3 Règle du parallélogramme

Propriété 12. Si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ont la même origine alors $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD}$, où D est l'unique point tel que $ABDC$ est un parallélogramme.

4.4 Différence de deux vecteurs

Définition 13. Opposé d'un vecteur
- Le vecteur $-\overrightarrow{v}$ vérifie $\overrightarrow{v} + (-\overrightarrow{v}) = \overrightarrow{0}$.
- La différence $\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v}$ est définie par $\overrightarrow{u} + (-\overrightarrow{v})$.



Définition 14. Différence de deux vecteurs Dans un repère du plan, si $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ alors $\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v}\begin{pmatrix} x - x' \\ y - y' \end{pmatrix}$