Fonctions, approche graphique

Table des matières

1 Modéliser par une fonction

Deux quantités peuvent varier tout en étant liées. Ce lien peut s'exprimer par un tableau de données, une formule ou un graphique (courbe ou nuage de points). Dans certains cas on peut **modéliser** ce lien par une **fonction**.

Définition 1. Soit $\mathcal{D}$ un ensemble de nombres. On définit une fonction f sur $\mathcal{D}$ en associant à chaque nombre x appartenant à $\mathcal{D}$ un seul nombre y ; f est une **fonction** de la **variable** x.

Il existe plusieurs manières de modéliser une fonction :

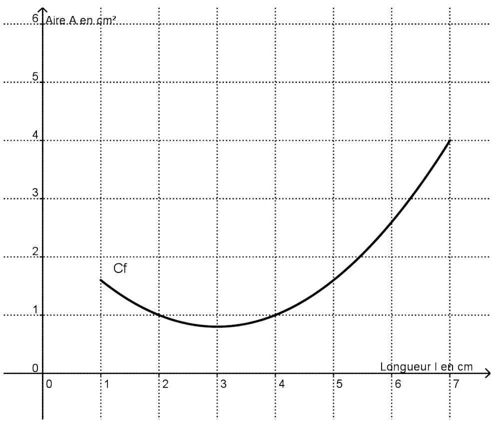
1.1 Fonctions données par un tableau de valeurs

A chaque taille de pied on associe une seule pointure.
On introduit la fonction p : taille de pied $\mapsto$ pointure

Taille du pied en cm	23	23,5	23,6	25
Pointure	36	37	37	39

1.2 Fonction donnée par une courbe

La variable figure sur l'axe des abscisses, c'est l. À chaque longueur l (en cm) comprise entre 1 et 7 on associe une seule aire A (en cm^2). On considère donc la fonction f : $l \mapsto A$.



1.3 Fonction donnée par une formule

Un scooter roule à la vitesse constante de 50km.h^{-1}. À chaque durée de trajet t (en h) correspond une distance parcourue d (en km) : $d = 50t$.
On définit la fonction g : $t \mapsto d$. La variable est la durée t.

2 Vocabulaire et notations

Définition 2. A chaque nombre x appartenant à $\mathcal{D}$ la fonction f associe un **seul** nombre y.

$$f : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto y$$

Remarque.
- $\mathcal{D}$ est **l'ensemble de définition** de f.
  $\mathcal{D}$ est l'ensemble des nombres auxquels on peut appliquer f.
  On dit que f est définie sur $\mathcal{D}$.
- y est **l'image** de x par f.
  On le note $f(x)$ et on lit « f de x »
- x est un **antécédent** de y par f.

Exemple.
- Dans l'exemple des aires, la variable l prend toutes les valeurs entre 1 et 7 ; l'ensemble de définition est l'intervalle $\mathcal{D} =]1; 7]$.
- Dans l'exemple des chaussures, l'image de 23 est 36. On note $p(23) = 36$.
  23 est un antécédent de 36 par p ... et il y en a bien d'autres !

3 Courbe d'une fonction

Le plan est muni d'un repère (O, I, J).

Définition 3. La **représentation graphique** d'une fonction, qu'on appelle aussi la **courbe** d'une fonction, est l'ensemble des points $M(x, y)$ du plan dont les coordonnées vérifient la relation :

$$f(x) = y$$

On note $\mathcal{C}$ la courbe de f.

Définition 4. Un point $M(x, y)$ est sur la courbe si et seulement si ses coordonnées vérifient **l'équation** $f(x) = y$.

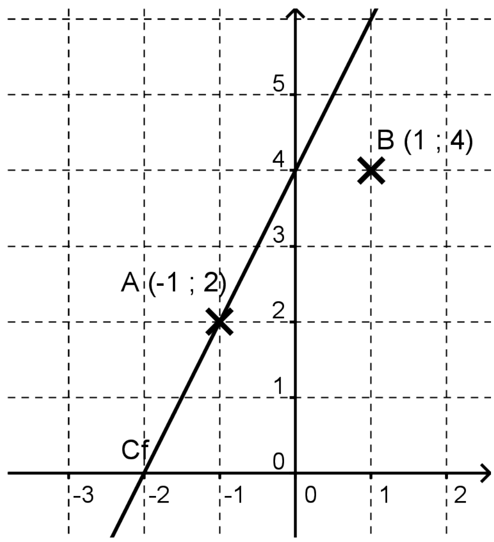
Définition 5. Quand une fonction est donnée par une formule, on dit que $f(x)$ est **l'expression** de cette fonction.

Exemple.

Pour tout x de $\mathbb{R}$, $f : x \mapsto 2x + 4$.
L'expression est $f(x) = 2x + 4$.

Tracer la courbe de f c'est représenter les points du plan vérifiant cette relation.
Les points qui sont en dehors de la courbe ne vérifient donc pas l'équation $f(x) = y$.
- $A(-1; 2)$ vérifie $f(-1) = 2 \times (-1) + 4 = 2$.
  A appartient à $\mathcal{C}$.
- $B(1; 4)$ ne vérifie pas cette relation ; en effet $f(1) = 2\times1+4 = 6 \neq 4$.
  B n'est pas sur $\mathcal{C}$.

Remarque Dans cet exemple, la fonction f est **affine** et sa courbe est une **droite.**



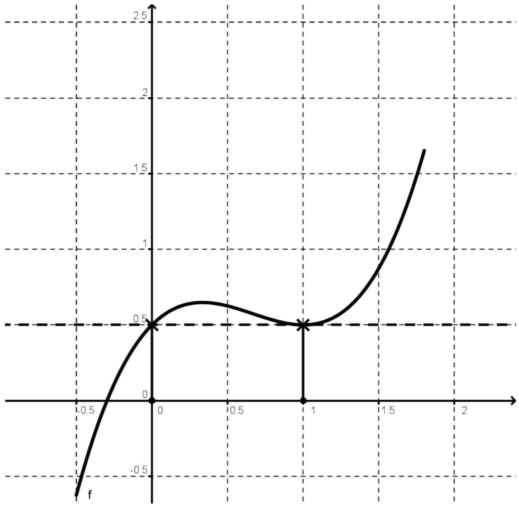
4 Résolution graphique d'équations et d'inéquations

Remarque. La *résolution graphique* est toujours soumise à la précision du graphique.
Sans information supplémentaire, on n'obtient donc que des réponses *approchées.*

4.1 Résolution graphique de $f(x) = k$

Définition 6. Pour *résoudre graphiquement* l'équation $f(x) = k$ on cherche tous les points de $\mathcal{C}$ dont **l'ordonnée** est k.
Les solutions sont les **antécédents** de k par f.

Méthode 1. Résoudre graphiquement $f(x) = 0,5$



1. On place 0,5 sur l'axe des ordonnées.
2. On trace la parallèle à Ox passant par l'ordonnée 0,5. Elle coupe $\mathcal{C}$ en deux points.
3. Pour chaque point on repère l'abscisse correspondante. Ce sont les solutions
4. $f(x) = 0,5$ a deux solutions : 0 et 1.

Exemple. Résoudre graphiquement les équations $f(x) = 1$ et $f(x) = 2$ dans l'exemple précédent.

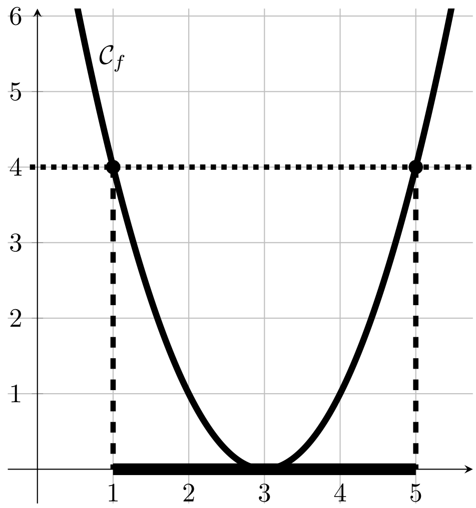
4.2 Résolution graphique d'une inéquation : $f(x) < k$

Remarque. Nous allons nous intéresser d'abord à l'inégalité $<$. Pour les autres inégalités, la démarche est similaire.

Définition 7. Pour résoudre graphiquement l'inéquation $f(x) < k$ on cherche tous les points de $\mathcal{C}$ dont **l'ordonnée est inférieure** à k.
Les solutions sont les absisses de ces points.

Remarque. Les solutions d'une inéquations forment généralement un intervalle ou une réunion d'intervalle.

Méthode 2. Résoudre graphiquement $f(x) < 4$



1. On place 4 sur l'axe des ordonnées.
2. On trace la parallèle à Ox passant par l'ordonnée 4. Elle coupe $\mathcal{C}$ en deux points.
3. Pour chaque point on repère l'abscisse correspondante. Ici nous lisons 1 et 5.
4. L'inégalité est $<$ on cherche donc les points de $\mathcal{C}_f$ qui sont *strictement en dessous* de la droite.
5. $f(x) < 4$ a pour ensemble de solution l'intervalle $]1; 5[$.
   L'inégalité $<$ étant stricte, les bornes sont *exclues*.

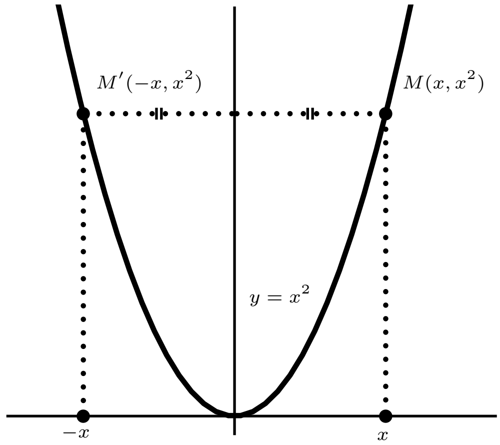
5 Fonctions paires et impaires

La *parité* d'une fonction est une propriété, vérifiée par certaines fonctions, qui fait le lien entre une symétrie de sa courbe et une relation algébrique.

5.1 Fonction paire

Définition 8. Fonction paire
Une fonction définie sur $\mathcal{D}$ est **paire** si les deux conditions suivantes sont vérifiées :
- $\mathcal{D}$ est *symétrique* par rapport à 0.
  Autrement dit, pour tout x de $\mathcal{D}$, $-x$ est aussi un élément de $\mathcal{D}$.
- Pour tout $x \in \mathcal{D}$, $f(-x) = f(x)$

Exemple. Les fonctions suivantes sont définies sur $\mathbb{R}$ et sont paires : $f(x) = x^2, g(x) = x^4$, $h(x) = \dfrac{1}{x^2+1}$
- Pour chacune d'entre elle, l'ensemble de définition est $\mathbb{R}$ qui est symétrique par rapport à 0.
- Elles vérifient, par exemple pour f : pour tout x de $\mathbb{R}$ $f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x)$



Exemple. La fonction k définie sur $\mathbb{R}$ par $k(x) = 2x+1$ n'est pas paire.
Son ensemble de définition est bien symétrique par rapport à 0 mais $k(-1) = -1 \neq k(1) = 3$.

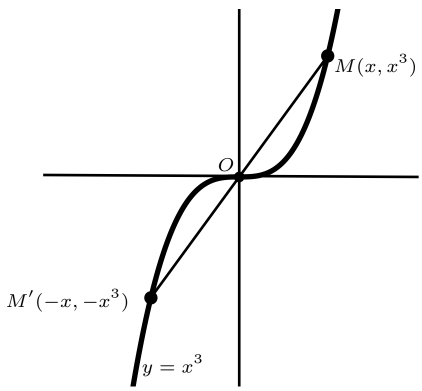
Remarque. Une fonction est paire si l'égalité est vérifiée pour **tous les nombres de son ensemble de définition**
Pour démontrer qu'une fonction n'est pas paire, il est suffisant de donner un contre exemple.

Propriété 1. Admise Une fonction est *paire* si, et seulement si, sa courbe est *symétrique par rapport à l'axe des ordonnées*.

5.2 Fonction impaire

Définition 9. Une fonction définie sur $\mathcal{D}$ est **impaire** si les deux conditions suivantes sont vérifiées :
- $\mathcal{D}$ est *symétrique* par rapport à 0.
  Autrement dit, pour tout x de $\mathcal{D}$, $-x$ est aussi un élément de $\mathcal{D}$.
- Pour tout $x \in \mathcal{D}$, $f(-x) = -f(x)$

Exemple. Les fonctions suivantes sont définies sur $\mathbb{R}$ et sont impaires : $f(x) = x$ et $g(x) = x^3$. La fonction h est définie sur $\mathbb{R}^*$ par $h(x) = \dfrac{1}{x}$ est est impaire.
- Pour chacune d'entre elle, l'ensemble de définition est symétrique par rapport à 0.
- Elles vérifient, par exemple pour g : pour tout x de $\mathbb{R}$ $g(-x) = (-x)^3 = -x^3 = -g(x)$



Exemple. La fonction k définie sur $\mathbb{R}$ par $k(x) = 2x+1$ n'est pas non plus impaire (elle n'était pas paire, ce qu'on a vu dans la partie précédente...).
Son ensemble de définition est bien symétrique par rapport à 0 mais $k(-1) = -1 \neq -k(1) = -3$.

Remarque. Une fonction est impaire si l'égalité est vérifiée pour **tous les nombres de son ensemble de définition**
Pour démontrer qu'une fonction n'est pas impaire, il est suffisant de donner un contre exemple.

Propriété 2. Admise Une fonction est *impaire* si, et seulement si, sa courbe est *symétrique par rapport à l'origine du repère*.