Exercice 26

1. Montrons que $\forall n \geq 1$ on a : $\Delta_n = 2^{n-1} + \Delta_{n-1}$

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & \dots & 1 \\ -1 & 2 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 & \dots & \dots \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 0 & -1 & 2 \end{vmatrix}$$

on va développer le calcul par rapport à la première colonne :

$$\Delta_n = 1 \times \overbrace{\begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & -1 & 2 \end{vmatrix}}^{(n-1) colonnes : \Delta'_{n-1}} \text{-(-1)} \times \overbrace{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 0 \\ -1 & 2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & -1 & 2 \end{vmatrix}}^{\Delta_{n-1}}$$

Calcul de Δ'_{n-1} : $\quad \Delta'_{n-1} = 2 \times \overbrace{\begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & -1 & 2 \end{vmatrix}}^{(n-2) colonnes : \Delta'_{n-2}}$

Ainsi : $\Delta'_{n-1} = 2 \times \Delta'_{n-2}$

$$\begin{aligned}
\Delta'_{n-1} &= 2 \times \Delta'_{n-2} \\
&= 2 \times 2 \times \Delta'_{n-3} \\
&= 2 \times 2 \times 2 \times \Delta'_{n-4} \\
&= 2^3 \Delta'_{n-4} \\
&= 2^4 \Delta'_{n-5} \\
&\vdots \\
&= 2^{n-2} \Delta'_{n-(n-2+1)} \\
&= 2^{n-2} \Delta'_{n-(n-1)} \\
&= 2^{n-2} \Delta'_{n-n+1)} \\
&= 2^{n-2} \Delta'_{1)} \\
&= 2^{n-2} \times 2 = 2^{n-1} \quad finalement \qquad \Delta_n = 2^{n-1} + \Delta_{n-1}
\end{aligned}$$

2. on a $\Delta_n = 2^{n-1} + \Delta_{n-1}$

$\Delta_n = 2^{n-1} + \overbrace{(2^{n-2} + \Delta_{n-2})}^{\Delta_{n-1}}$

$\Delta_n = 2^{n-1} + 2^{n-2} + \overbrace{(2^{n-3} + \Delta_{n-3})}^{\Delta_{n-2}}$

$\Delta_n = 2^{n-1} + 2^{n-2} + 2^{n-3} + \cdots + 2^0 + \underbrace{\Delta_0}_{=0}$

$\Delta_n = 2^{n-1} + 2^{n-2} + 2^{n-3} + \cdots + 2^0 = \sum_{k=0}^{n-1} 2^k$

RAPPEL : $\forall \mathbf{q} \in \mathbf{R}$ *avec* $\mathbf{q} \neq 1$

$$\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$$

donc

$$\Delta_n = \sum_{k=0}^{n-1} 2^k = \frac{1-2^n}{1-2} = 2^n - 1$$