Exercice 25

1. On va soustraire L_1 aux autres lignes pour faire apparaître des 0

> **PROPRIÉTÉ** : si aux éléments d'une ligne (ou colonne) on ajoute k fois les éléments d'une autre ligne (ou colonne), la valeur du déterminant reste inchangée.

$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}$ devient $\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1-1 & -1-1 & 1-1 & 1-1 \\ 1-1 & 1-1 & -1-1 & 1-1 \\ 1-1 & 1-1 & 1-1 & -1-1 \end{vmatrix}$

ainsi $\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{vmatrix}$

On obtient le déterminant d'une matrice triangulaire supérieure.

> **PROPRIÉTÉ** : le déterminant d'une matrice triangulaire est égal au produit des termes de la diagonale principale.

$$\Delta_1 = 1 \times (-2) \times (-2) \times (-2) = -8$$

2. $\Delta_2 = \begin{vmatrix} \mathrm{a} & 3 & 0 & 5 \\ 0 & \mathrm{b} & 0 & 2 \\ 1 & 2 & \mathrm{c} & 3 \\ 0 & 0 & 0 & d \end{vmatrix}$ L_4 fait apparaitre trois 0, on va développer le déterminant par rapport à cette ligne.

$\Delta_2 = 0 \times \Delta_{41} + 0 \times \Delta_{42} + 0 \times \Delta_{43} + \mathrm{d} \times \Delta_{44} = \mathrm{d} \times \Delta_{44}$

$\Delta_2 = \mathrm{d} \times (-1)^{4+4} \times \begin{vmatrix} \mathrm{a} & 3 & 0 \\ 0 & \mathrm{b} & 0 \\ 1 & 2 & \mathrm{c} \end{vmatrix}$

On développe le déterminant (3×3) par rapport à C_3

$\Delta_2 = \mathrm{d} \times (-1)^{4+4} \times \mathrm{c} \times (-1)^{3+3} \times \begin{vmatrix} \mathrm{a} & 3 \\ 0 & \mathrm{b} \end{vmatrix}$

$\Delta_2 = \mathrm{d} \times (-1)^{4+4} \times \mathrm{c} \times (-1)^{3+3} \times (ab - 0 \times 3) = abcd$

3. $\Delta_3 = a \begin{vmatrix} a & a & a & a \\ a & b & b & b \\ a & b & c & c \\ a & b & c & d \end{vmatrix}$

On soustraie d'abord L_1 à toutes les autres lignes

$\Delta_3 = \begin{vmatrix} a & a & a & a \\ 0 & b-a & b-a & b-a \\ 0 & b-a & c-a & c-a \\ 0 & b-a & c-a & d-a \end{vmatrix}$, en développant par rapport à C_1, on obtient : $\Delta_3 = a \begin{vmatrix} b-a & b-a & b-a \\ b-a & c-a & c-a \\ b-a & c-a & d-a \end{vmatrix}$

On soustrait L_1 à L_2 et L_3 on obtient :$\Delta_3 = a \begin{vmatrix} b-a & b-a & b-a \\ 0 & c-b & c-b \\ 0 & c-b & d-b \end{vmatrix}$

On développe le calcul par rapport à C_1 et on a :$\Delta_3 = a \times (b-a) \times \begin{vmatrix} c-b & c-b \\ c-b & d-b \end{vmatrix}$

$$\Delta_3 = a(b-a)((c-b)(d-b) - (c-b)^2) = a(b-a)(c-b)(d-b-c+b) = a(b-a)(c-b)(d-c)$$