Exercice 23

1. On considère A la matrice de $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ avec A= $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & -1 & -9 & 13 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

   On developpe $\det(A)$, par rapport à la troisième ligne. En effet , cette ligne possède trois 0
   On notera le déterminant de A =$|A|$

$$|A|=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & -1 & -9 & 13 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$|A| = 0 \times \Delta_{31} + 0 \times \Delta_{32} + 0 \times \Delta_{33} + 2 \times \Delta_{34}$$

   donc

$$\begin{aligned} |A| &= 2 \times \Delta_{34} && (1) \\ &= 2 \times \ (-1)^{3+4}\,|A_{34}| && (2) \\ &= 2 \times \ (-1) \times |A_{34}| && (3) \\ &= -2 \times |A_{34}| && (4) \\ & && (5) \end{aligned}$$

$$avec$$

$$|A_{34}| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & -1 & -9 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}$$

   On developpe $|A_{34}|$ par rapport à la troisième ligne. En effet , cette ligne possède deux 0

$$|A_{34}| = 0 \times \Delta_{31} + 0 \times \Delta_{32} - 1 \times \Delta_{33}$$

$$ainsi$$

$$|A_{34}| = -1 \times \Delta_{33}$$

$$\begin{aligned} |A| &= -2 \times |A_{34}| && (6) \\ &= -2 \times (-1 \times \Delta_{33}) && (7) \\ &= 2 \times \Delta_{33} && (8) \\ &= 2 \times \ (-1)^{3+3} \times |A_{33}| && (9) \\ &= 2 \times \ 1 \times |A_{33}| && (10) \\ &= 2 \times |A_{33}| && (11) \\ & && (12) \end{aligned}$$

   On sait que $|A_{33}| = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix}$

   donc $|A| = 2 \times (-1) \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = -2 \times (-7) = 14$

2. On considère B la matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que avec $B=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 4 & -1 \\ 1 & 5 & -2 \end{pmatrix}$

On va calculer $|B|=\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 4 & -1 \\ 1 & 5 & -2 \end{vmatrix}$

Développons le calcul de $|B|$ par rapport à la première ligne :

$$|B| = 1 \times \Delta_{11} - 2 \times \Delta_{12} + 3 \times \Delta_{13}$$

Calcul des cofacteursΔ_{ij}

$$|B| = 1 \times (-1)^{1+1} \times |B_{11}| - 2 \times (-1)^{1+2} \times |B_{12}| + 3 \times (-1)^{1+3} \times |B_{34}|$$

avec

- $\Delta_{11} = (-1)^{1+1} \times |B_{11}| = +1 \times |B_{11}|$
- $\Delta_{11} = (-1)^{1+2} \times |B_{12}| = +1 \times |B_{12}|$
- $\Delta_{11} = (-1)^{1+3} \times |B_{13}| = +1 \times |B_{13}|$

Ainsi $|B| = 1 \times (+1) \times |B_{11}| - 2 \times (-1) \times |B_{12}| + 3 \times (+1) \times |B_{13}|$

$\Rightarrow \quad |B| = 1 \times |B_{11}| + 2 \times |B_{12}| + 3 \times |B_{13}|$

En développant les mineurs, on a :

$|B| = 1 \times \begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 5 & -2 \end{vmatrix} + 2 \times \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} - 3 \times \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 5 \end{vmatrix}$

$|B| = 1 \times (-3) + 2 \times (-3) + 3 \times 6 = 9$