Récursivité

qkzk

2019/12/25

Récursivité

Définition

Propriété que possède une règle ou un élément constituant de pouvoir se répéter de manière théoriquement indéfinie. (C'est une propriété essentielle des règles d'une grammaire générative, celle qui permet d'engendrer un nombre infini de phrases.)

Se dit d'un programme informatique organisé de manière telle qu'il puisse se rappeler lui-même, c'est-à-dire demander sa propre exécution au cours de son déroulement.

Définition

La récursivité est une démarche qui fait référence à l'objet même de la démarche à un moment du processus. En d'autres termes, c'est une démarche dont la description mène à la répétition d'une même règle. Par exemple :

- *écrire un algorithme qui s'invoque lui-même ;*
- *définir une structure à partir de l'une au moins de ses sous-structures.*

Exemples

processus récursif

1. Calcul de la fonction dérivée d'une fonction dérivable

Entrée : **f** (une fonction dérivable) - Sortie : **f'** (la fonction dérivée)

```
derivee(f) =
    si f est une fonction élémentaire de base
        renvoyer sa dérivée
    sinon si f == u+v
        renvoyer derivee(u) + derivee(v)
    sinon si f == u × v
        renvoyer derivee(u)×v + u×derivee(v)
    sinon si ...
```

Exemples

2. Production de fractales : le flocon de Von Koch

On dispose de la primitive *tracer(l)* qui permet de tracer un segment de longueur *l*.

Le processus de tracé d'un segment de von koch de taille *l* à l'ordre *n* est :

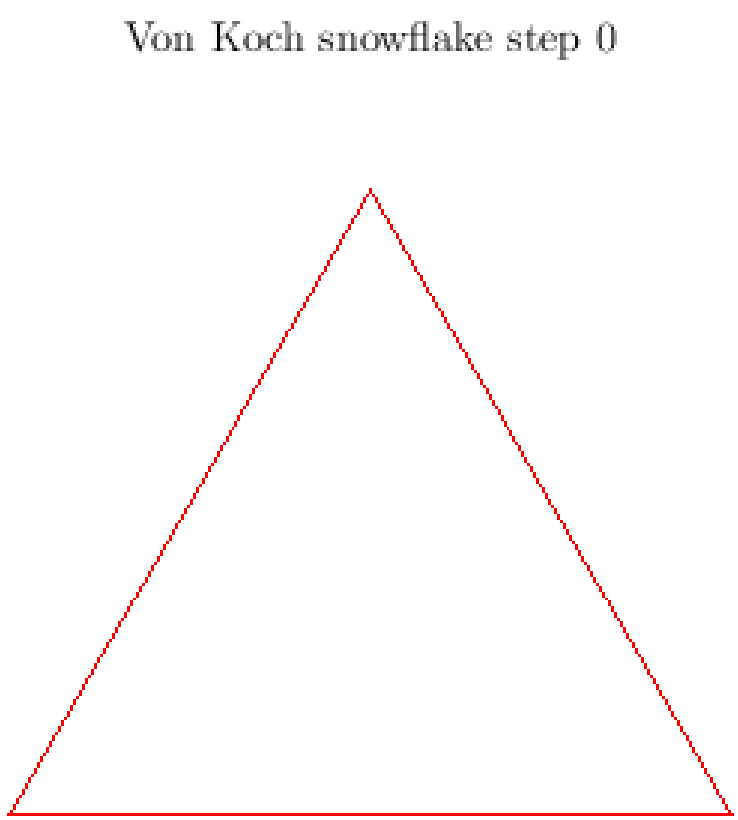
Exemples

vonkoch(l,n)

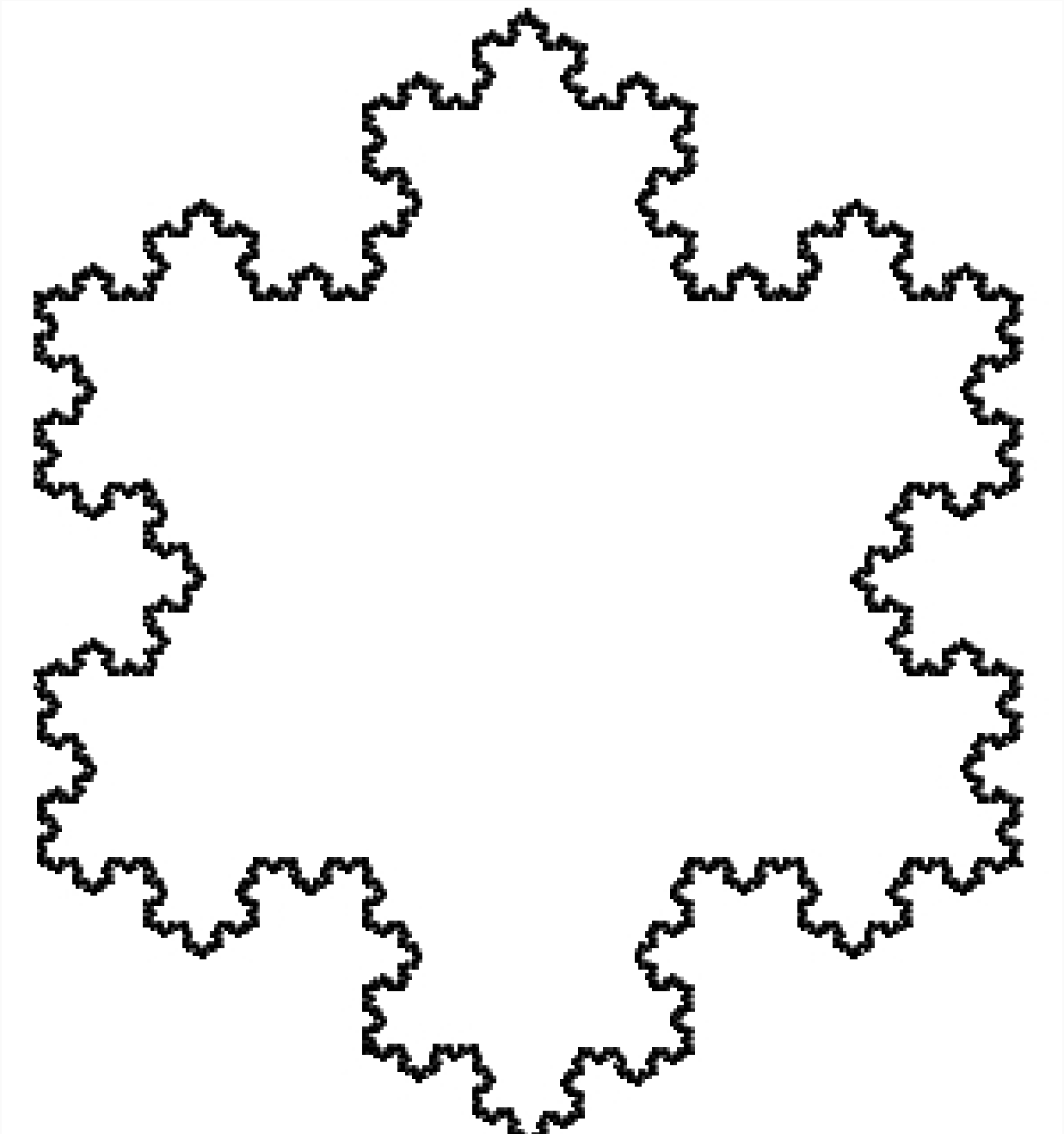
- si n $= 1$, *tracer(l)*
- sinon
  - *vonkoch*(l/3, n-1)
  - tourner à gauche de 60°
  - *vonkoch*(l/3, n-1)
  - tourner à droite de 120°
  - *vonkoch*(l/3, n-1)
  - tourner à gauche de 60°
  - *vonkoch*(l/3, n-1)

Exemples

Le flocon est obtenu en traçant 3 segments de von koch séparés par des rotations à droite de 120°.



Exemples



Exemples

NB : Se réalise très bien avec la tortue (module `turtle`), *tracer(l)* = `forward(l)` et les fonctions `right` et `left` permettent les rotations

Images

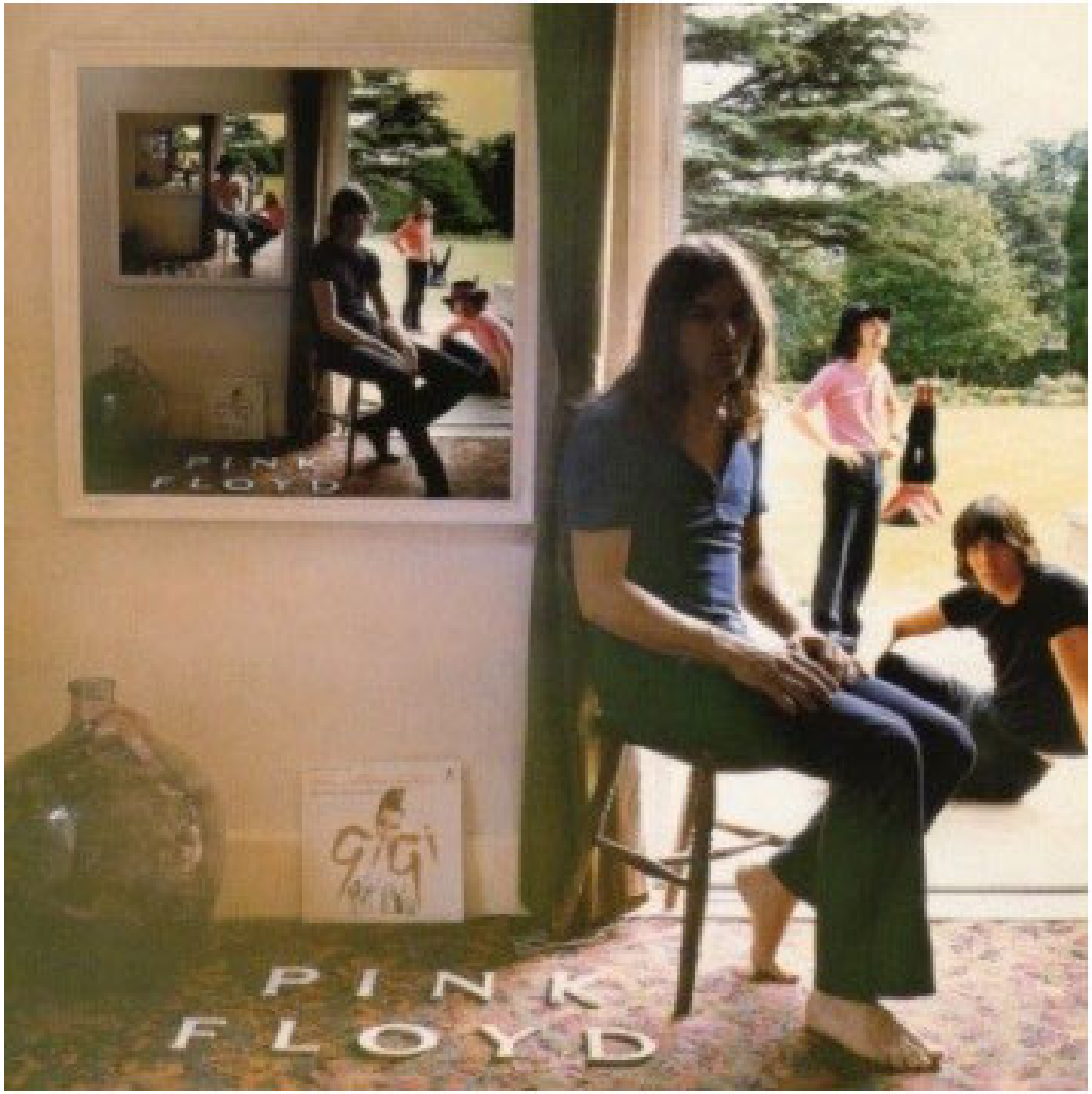
- *Print gallery* M.C.Escher

Images

- *La vache qui rit*

Images

- *Pochette Ummagumma* de Pink Floyd



Sigles

- **VISA** : *VISA* International Service Association
- **GNU** : *GNU* is Not Unix
- **WINE** : *Wine* Is Not an Emulator
- **Bing** : *Bing* is not Google (non officiel)
- **LAME** : *Lame* Ain't an MP3 Encoder

Grammaire

Un *groupe nominal* est composé d'un nom ou d'un nom et son complément. Le complément d'un nom est soit un adjectif, soit un adverbe, soit un *groupe nominal*. (très approximativement)

```
groupe_nominal ::=    nom
                    | nom complement
complement     ::=    adjectif
                    | adverbe
                    | groupe_nominal
```

Algorithmes et structures récursifs

Algorithmes et structures récursifs

Algorithme récursif

- le *tri rapide* : cf. tri fusion U. Lille,
- le *tri fusion*
- l'algorithme de remplissage d'une zone délimitée

Structures récursives

- *listes*,
- *arbres*

Algorithmes récursifs

Définition

Un algorithme de résolution d'un problème P sur une donnée a est dit ***récursif***

si parmi les opérations utilisées pour le résoudre, on trouve la résolution du même problème P sur une donnée b.

Dans un algorithme récursif, on nomme ***appel récursif*** *toute étape de l'algorithme résolvant le même problème sur une autre donnée.*

Exemple

Ne faisons pas dans l'originalité :

$$n! = n \times (n-1)! \text{ si } n \geq 1 \text{ et } 0! = 1$$

Principe :

```
5! = 5 * 4!
   = 5 * 4 * 3!
   = 5 * 4 * 3 * 2!
   = 5 * 4 * 3 * 2 * 1!
   = 5 * 4 * 3 * 2 * 1 * 0!
   = 5 * 4 * 3 * 2 * 1 * 1
   = 120
```

Algorithmes récursifs

Programmation

```
def fact(n):
    if n <= 1:
        return 1
    else:
        return n * fact(n-1)

>>> fact(5)
120
```

Déroulement de l'exécution

Mise en évidence :

- avec le debugger de Thonny : `src/factorielle_simple.py`
- avec PythonTutor
- utilisation d'un décorateur (défini dans `src/recursivite_decorators.py`, fourni).

```
from recursivite_decorators import *


@trace
def fact(n):
    ...
```

Algorithmes récursifs

On observe la construction de la pile des appels successifs de la fonction. Chaque appel possède son propre environnement, donc ses propres variables.

La pile est nécessaire pour mémoriser les valeurs propre à chaque appel.

```
def fact(n):
  if n <= 1:
    result = 1
  else:
    next_value = n-1
    result = n * fact(next_value)
  return result
>>> fact(5)
120
```

Algorithmes récursifs

Dans PythonTutor

Attention : En Python la taille de la pile des appels récursifs est limitée. Si la récursivité est trop profonde et que l'on atteint cette limite, on déclenche une `RecursionError`.

La valeur de cette pile peut être obtenue par :

```
>>> import sys
>>> sys.getrecursionlimit()
3000
```

et modifiée par

```
>>> sys.setrecursionlimit(100)
>>> fact(100)
  Traceback (most recent call last):
  File "<pyshell>", line 1, in <module>
  File "C:\Users\qk\Documents\jc\enseignement\diu\bloc1\sup
    return n * fact(n-1)
  ...
  File "C:\Users\qk\Documents\jc\enseignement\diu\bloc1\sup
    if n <= 1:
```

Eléments Caractéristiques

Eléments Caractéristiques

1. **il faut au moins une situation qui ne consiste pas en un appel récursif**

```
if n <= 1:
    return 1
```

Cette situation est appelée **situation de terminaison** ou **situation d'arrêt** ou **cas d'arrêt** ou **cas de base**.

Eléments Caractéristiques

2. **chaque appel récursif doit se faire avec des données qui permettent de se rapprocher d'une situation de terminaison**

```
return n * fact(n-1)
```

Eléments Caractéristiques

Il faut s'assurer que la situation de terminaison est atteinte après un nombre fini d'appels récursifs.

La preuve de terminaison d'un algorithme récursif se fait en identifiant la construction d'une suite strictement décroissante d'entiers positifs ou nuls.

Dans le cas de factorielle, il s'agit simplement de la suite des valeurs du paramètre.

Mauvaise conception récursive

Mauvaise conception récursive

Respecter la première règle ne suffit pas :

```
def fact(n):
    if n <= 1:
        return 1
    else:
        return fact(n+1)/(n+1)
```

Mauvaise conception récursive

Un autre exemple

Il faut trouver un énoncé récursif de résolution du problème, c'est-à-dire un énoncé qui fasse référence au problème lui-même.

Exemple : calculer le nombre d'occurrences d'un caractère dans une chaîne.

Énoncé :

- Le **nombre d'occurrences** de c dans s est 0 si s est vide.
- Si c est le premier caractère de s, on ajoute 1 au **nombre d'occurrences** de c dans les autres caractères de s. Sinon, il s'agit du **nombre d'occurrences** de c dans les autres caractères de s.

Mauvaise conception récursive

```
def occurrences(c,s):
    if s == "":
       return 0
    elif c == s[0]:
         return 1 + occurrences(c, s[1:])
    else:
         return occurrences(c, s[1:])
```

La terminaison se vérifie en considérant la suite des longueurs des chaînes passées en paramètre.

Récursivité terminale

Récursivité terminale

Un algorithme récursif simple est **terminal** lorsque l'appel récursif est le dernier calcul effectué pour obtenir le résultat. Il n'y a pas de "calcul en attente". L'avantage est qu'il n'y a rien à mémoriser dans la pile.

Ce n'est pas le cas des deux exemples précédents `fact` et `occurrences`.

Récursivité terminale

Exemple d'algorithme récursif terminal

Prédicat de présence d'un caractère dans une chaîne :

Un caractère c* **est présent** dans une chaîne *s* non vide, s'il est le premier caractère de *s* ou s'il **est présent** dans les autres caractères de *s*. Il n'est pas présent dans la chaîne vide.*

```
def est_present(c,s):
    if s == '':
        return False
    elif c == s[0]:
        return True
    else:
        return est_present(c,s[1:])
```

Voir le comportement avec PythonTutor, le debugger de Thonny ou

Récursivité terminale

Rendre terminal un algorithme récursif

On utilise un **accumulateur**, passé en paramètre, pour calculer le résultat au fur et à mesure des appels récursifs.

La valeur de retour du cas de base devient la valeur initiale de l'accumulateur et lors d'un appel récursif, le "calcul en attente" sert à calculer la valeur suivante de l'accumulateur.

Récursivité terminale

Ainsi on obtient :

```
def fact_term(n, acc = 1):
    if n <= 1:
        return acc
    else:
        return fact_term(n-1, acc * n)
```

Récursivité terminale

et

```
def occurrences_term(c,s, acc = 0):
    if s == "":
       return acc
    elif c == s[0]:
         return occurrences_term(c,s[1:], acc + 1)
    else:
         return occurrences_term(c,s[1:], acc)
```

Récursivité croisée

Récursivité croisée

La définition précédente des algorithmes récursifs ne couvre pas les cas des algorithmes *mutuellement récursifs*.

Exemple typique (et très classique) :

```
def pair(n):
    if n == 0:
        return True
    else:
        return impair(n-1)

def impair(n):
    if n == 0:
        return False
    else:
        return pair(n-1)
```

Récursivité multiple

Récursivité multiple

Un algorithme récursif est multiple si l'un des cas qu'il distingue se résout avec plusieurs appels récursifs.

C'était le cas de l'algorithme de dérivation.

Autre exemple avec le tri rapide

Retour sur les coefficients binomiaux

(ou un exemple où la récursivité, bien que naturelle, n'est pas adaptée)

Dans une séance précédente on a utilisé comme exemple les coefficients binomiaux avec pour formule de calcul :

$$C(n,p) = \frac{n!}{p! \times (n-p)!}$$

Mais vous connaissez aussi la relation de récurrence (Triangle de Pascal) :

- $C(n,p) = 1$ si $n = p$ ou $p = 0$
- $C(n,p) = C(n-1,p) + C(n-1,p-1)$ pour $n > p > 0$

Retour sur les coefficients binomiaux

Ce qui donnerait en Python

```
def C(n,p):
    if p == 0:
        return 1
    elif n == p:
        return 1
    else:
        return C(n-1, p-1)+ C(n-1, p)
```

Retour sur les coefficients binomiaux

Examinez la trace produite an ajoutant le décorateur `@trace`...

On peut observer l'explosion combinatoire du nombre d'appels récursifs et les redondances des calculs.

Ce nombre d'appels peut-être mis en évidence en utilisant un autre décorateur fourni : `@count`. Celui-ci ajoute à la fonction qu'il décore une propriété `counter` qui représente un compteur du nombre d'appels de cette fonction. On peut l'utiliser ainsi :

Retour sur les coefficients binomiaux

```
@count
def C(n,p):
    ...

>>> C.counter = 0  # on (ré)initialise le compteur pour la
>>> C(10,3)
  ...
120
>>> C.counter # accès au nombre d'appels de C
>>> # depuis la dernière remise à 0 de counter
239
```

Retour sur les coefficients binomiaux

Dans un tel cas, si on veut utiliser efficacement la récursivité, il faudrait la coupler à un mécanisme de **memoïsation** (Wikipedia) qui permet d'éviter de refaire plusieurs fois le même calcul.

Structures récursives

Structures récursives

Les listes Python sont des listes à “base de tableau”.

Les listes de Python sont des **tableaux dynamiques**, c’est-à-dire des tableaux dont *la taille peut varier.*

Pas pareil dans tous les langages (exemple Java)

(NB : en javascript, le type `Array` se comporte comme les listes Python).

Structures récursives

De manière plus formelle, les listes sont des structures de données dynamiques et intrinsèquement récursives.

Structures récursives

Elles se définissent ainsi :

Une liste d'éléments de type **T** est

- soit la liste vide
- soit un couple *(t,R)* où *t* est de type **T** et *R* est une liste d'éléments de type **T**

Dans le cas d'une liste non vide *(t,R)* :

- *t* est le premier élément de la liste aussi appelée **tête** de la liste
- *R* est la liste des éléments qui suivent *t*, également appelée **reste** de la liste

On parle pour de telles structures de **listes chaînées**, qui se distingue donc des listes par tableaux.

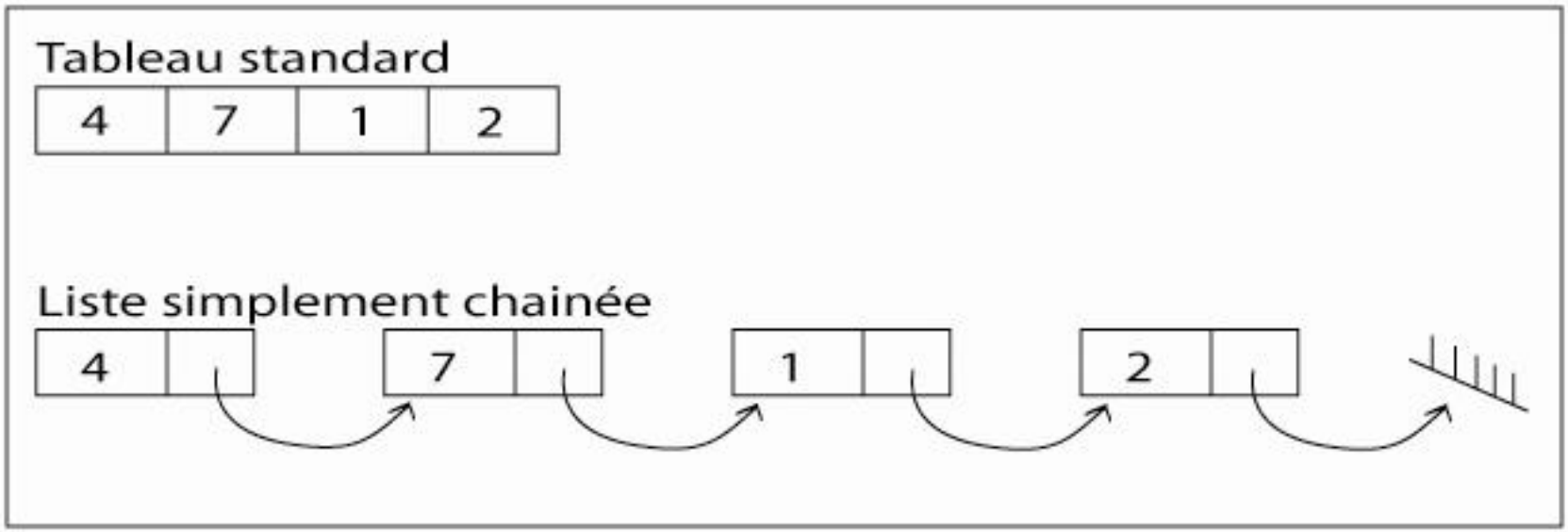


Figure 3: liste chainee

Listes chainées : plus efficaces que les tableaux pour supprimer un élément de la liste, ou en insérer un.

Structures récursives

Avec cette définition des listes, la définition d'une constante pour la liste vide (`[]`) et de primitives permettant

- de construire un couple *(x, R)* (`[x]+R`)
- d'accéder à la tête d'une liste non vide (`l[0]`)
- d'accéder au reste d'une liste non vide (`l[1:]`)

suffit pour définir tous les traitements sur les listes.

L'écriture de ces traitements se fait alors à l'aide de fonctions récursives.

Structures récursives

Longueur d'une liste :

```
def length(liste):
    if liste == [] :
        return 0
    else:
        return 1 + length(liste[1:])
```

Nombre d'occurrences dans une liste :

```
def nb_occurrences(valeur, liste):
    if liste == [] :                                    # quid de leng
        return 0
    elif valeur == liste[0]:
        return 1 + nb_occurrences(valeur, liste[1:])
    else:
        return nb_occurrences(valeur, liste[1:])
```

Quelques erreurs “classiques”

attention aux effets de bord
(peut ne pas être une erreur, mais il faut être vigilant. . .)

```
def length_destroy(liste):
    '''
    >>> length_destroy([]) == 0
    True
    >>> length_destroy([1,2,3]) == 3
    True
    '''
    if liste == [] :
        return 0
    else:
        liste.pop()  # pop() retire dernier élément de lis
        return 1 + length_destroy(liste)
```

Structures récursives

Observons le comportement dans PythonTutor

oubli du return

Pour certains élèves, le `return` n'est pas nécessaire dans le cas récursif. Pour eux, le `return` du cas de base suffit, puisque l'on renvoie un résultat. Ils écrivent donc :

```
def fact(n):
    if n <= 1:
        return 1
    else:
        n * fact(n-1)
```

oubli du return

C'est encore plus vrai (pour eux) dans le cas d'un algorithme récursif terminal puisque, selon eux, le résultat est obtenu au cas d'arrêt...

```
def est_present(c,s):
    if s == '':
        return False
    elif c == s[0]:
        return True
    else:
        est_present(c,s[1:])
```

localité des environnements

Il s'agit d'une confusion entre une écriture itérative, basée sur des affectations de variables, et l'écriture récursive qui s'appuie sur la modification des paramètres.

Pour ces étudiants, les calculs sont faits (cf. l'incrémentation ci-dessous) et les appels récursifs aussi...

localité des environnements

```
def occurrences_erreur(c,s):
    result = 0
    if s == "":
        result = 0
    elif c == s[0]:
        result = result + 1
        occurrences_erreur(c,s[1:])
    else:
        occurrences_erreur(c,s[1:])
    return result
```

localité des environnements

Observons dans PythonTutor