8. Statistiques à deux variables

Terminale STMG

qkzk

Statistiques à deux variables

1. Nuage de points

Une **série statistique** est composée de plusieurs valeurs similaires. Lorsque ces valeurs sont des *paires de nombres* on parle de série à **deux variables**.

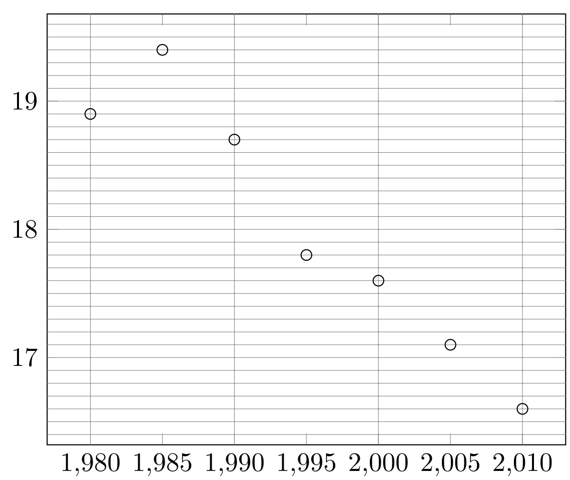
On représente alors graphiquement ces valeurs en traçant **un nuage de points**.

Définition On appelle nuage de points, l'ensemble des points M_i de coordonnées $(x_i; y_i)$.

Exemple On étudie la part de la dépense de consommation alimentaire dans le revenu disponible brut des ménages français de 1980 à 2010 (source : INSEE).

Année	1980	1985	1990	1995	2000	2005	2010
Dépenses (%)	18,9	19,4	18,7	17,8	17,6	17,1	16,6

On représente le nuage de points en prenant en x les années et en y les dépenses :



2. Point moyen et droite d'ajustement

Point moyen Soit une série statistique à deux variables x et y de moyennes $\bar{x}$ et $\bar{y}$.

Le point G de coordonnées $(\bar{x};\bar{y})$ avec

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \quad \text{et} \quad \bar{y} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i$$

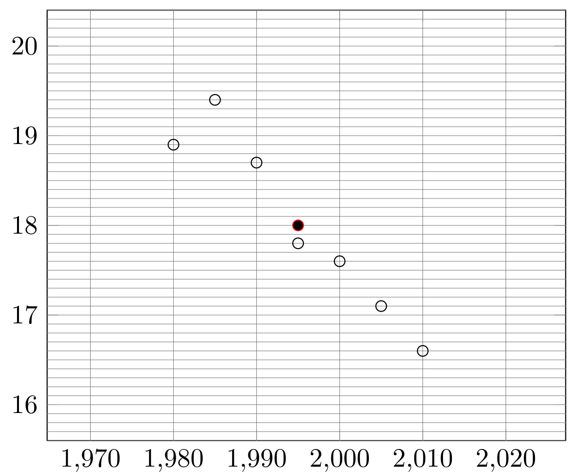
est appelé le *point moyen* du nuage.

Exemple Dans la série des ménages le points moyen a pour coordonnées :

$$x_G = \frac{1980 + 1985 + 1990 + 1995 + 2000 + 2005 + 2010}{7} = 1995$$

$$y_G = \frac{18.9 + 19.4 + 18.7 + 17.8 + 17.6 + 17.1 + 16.6}{7} \approx 18$$

Donc le point moyen est $G(1995, 18)$.

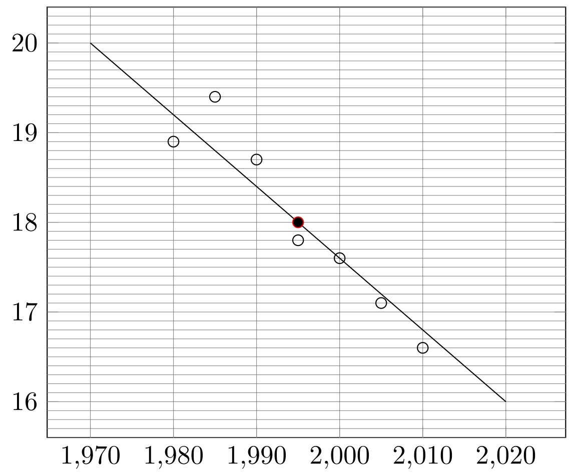


3. Droite d'ajustement

Droite d'ajustement Toute droite passant par le point moyen du nuage et "résumant approximativement" le nuage est appelée *droite d'ajustement* du nuage de points.

1. Au jugé

On trace "au jugé" une droite passant par le point moyen du nuage qui semble résumer le nuage de points. C'est une méthode simple mais qui dépend de la droite tracée.



2. Interpolation et extrapolation

En utilisant une droite d'ajustement on peut prédire des valeurs manquantes.

- Lorsque la valeur à prédire est *entre* les valeurs extrèmes, on parle d'*interpolation*
- Lorsque la valeur à prédire est *en dehors* des valeurs extrèmes, on parle d'*extrapolation*

Exemples D'après la figure précédente :

1. interpoler la consommation des ménages en 2002
2. Extrapoler la consommation des ménages en 1970 puis en 2020.

Réponses

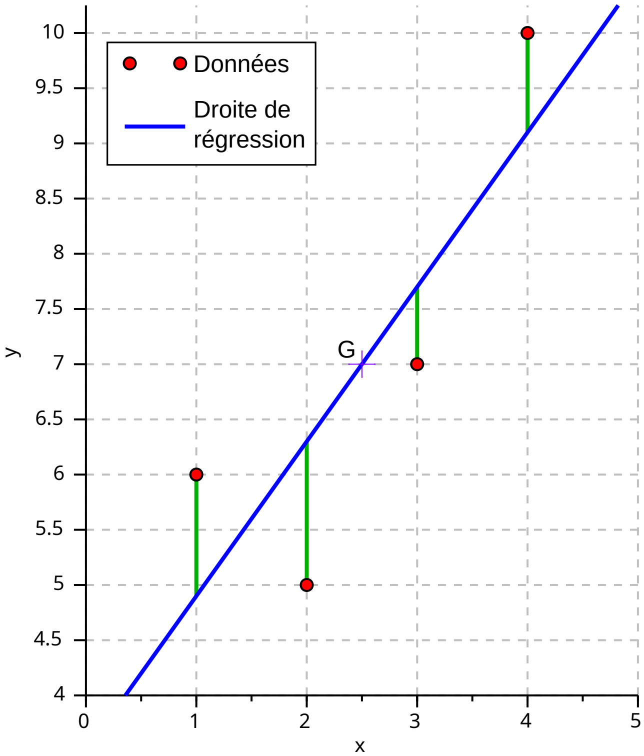
1. En 2002 on lit approximativement 17.4% (d'alimentaire dans la consommation des ménages)
2. En 1970, on lit environ 20% et en 2020 on lit environ 16.2%.

3. Méthode des moindres carrés et droite de régression linéaire

La méthode des moindres carrés consiste à chercher la meilleure droite d'ajustement possible selon un critère particulier.

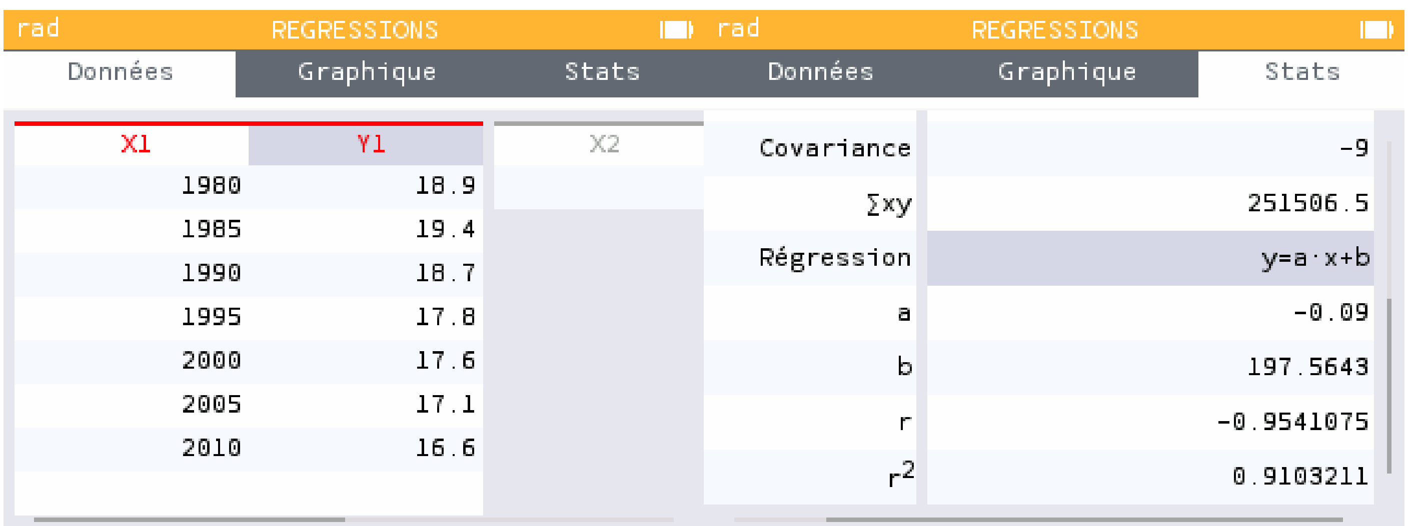
L'objectif est de minimiser *l'aire* des carrés entre un points du nuage et le point de la droite ayant la même abscisse.

Droite de regression Il existe *une* droite qui minimise ces aires, elle est appelée **droite de regression linéaire**

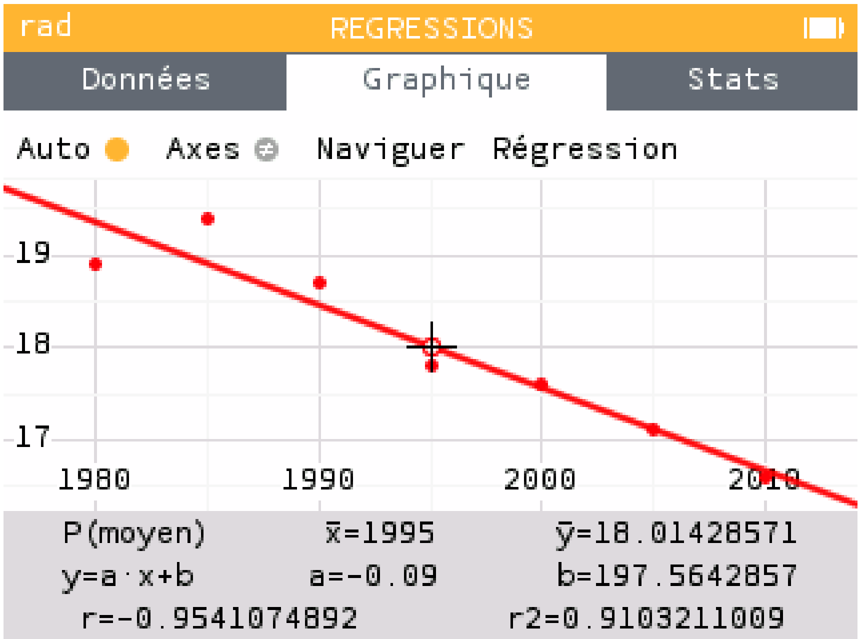


Donner la droite de régression c'est *écrire son équation sous la forme* $y = ax + b$.

Numworks La calculatrice Numworks permet de dessiner les nuages de points et d'obtenir la droite de régression. Menu **Regression**, saisir les valeurs en X et Y. Monter, aller sur **Stats**, descendre jusqu'à **Régression** et lire a et b.



On peut maintenant tracer et on a tout sur un seul écran !



Pour l'exemple précédent (*consommation des ménages*), on lit :

- Droite de regression : $y = -0.9x + 197.56$

Coefficient de corrélation linéaire Le nombre r, appelé *coéfficient de corrélation linéaire*, est un indicateur de la qualité de cette regression.

Il doit être proche (*très proche*) de 1 si la droite monte, de -1 si la droite descend.

Pour l'exemple précédent (*consommation des ménages*), on lit :

- Coéfficient de corrélation linéaire : $r = -0.954$.

Ce n'est pas mauvais... mais on étudiera des régressions avec $r \approx \pm 0.99$

Utiliser la droite de régression linéaire Pour estimer (interpoler ou extrapoler) une nouvelle valeur, il suffit d'utiliser l'équation $y = ax + b$ et de remplacer x par la nouvelle valeur.

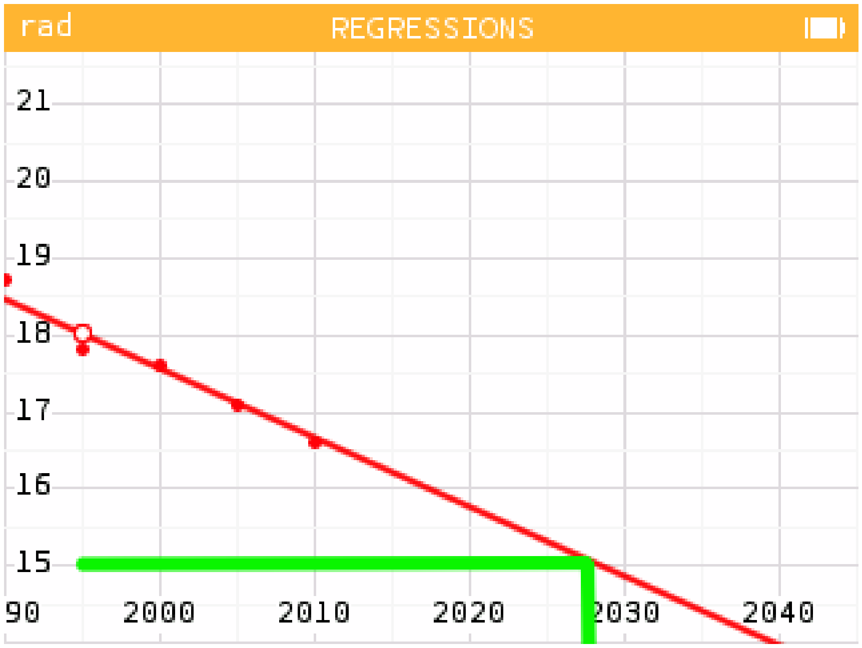
Exemple Toujours avec la consommation des ménages on a lu $y = -0.09x + 197.564$

1. Extrapoler la part de l'alimentaire en 1970.
2. Extrapoler la part de l'alimentaire en 2020.
3. Peut-on prédire quand la part d'alimentaire dans la consommation devrait passer sous les 15% ?

Réponses

1. Pour estimer la consommation des ménages en 1970, on fait : $y = -0.09 \times 1970 + 197.564 = 20.264$.
   On estime qu'en 1970, la part de l'alimentaire dans la consommation était de 20.26%
2. Pour estimer la consommation des ménages en 2020, on fait : $y = -0.09 \times 2020 + 197.564 = 15.764$.
   On estime qu'en 2020, la part de l'alimentaire dans la consommation était de 15.76%
3. Cette fois, il faut faire attention ! Ce 15% est une *ordonnée*. On part donc de $y = 15$ et on cherche l'abscisse correspondant sur la droite.
   - *Graphiquement*

     La figure précédente ne fait pas apparaître ce point, on peut changer les axes :



On lit $x = 2028$ et $y = 15$.

- *Par le calcul*, on résout :

$$-0.09x + 197.564 = 15 \iff -0.09x = 15 - 197.564 \iff -0.09x = -182.564 \iff x = \frac{-182.564}{-0.09} \approx 2028.48$$

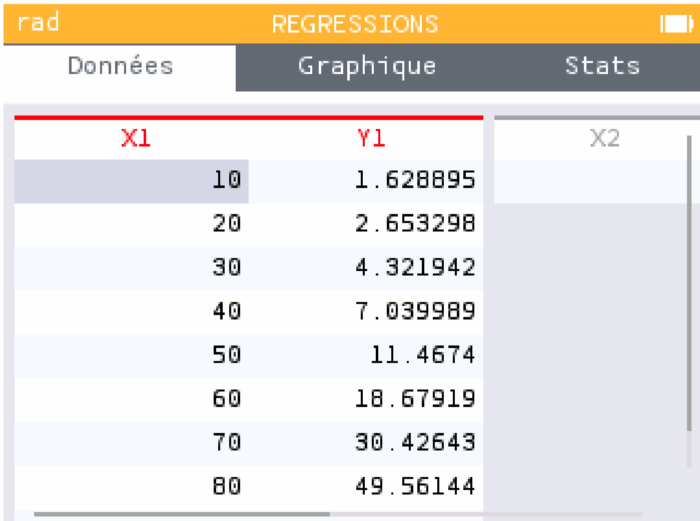
C'est bien entre 2028 et 2029 que la part de l'alimentaire dans la consommation des ménages devrait passer sous les 15%.

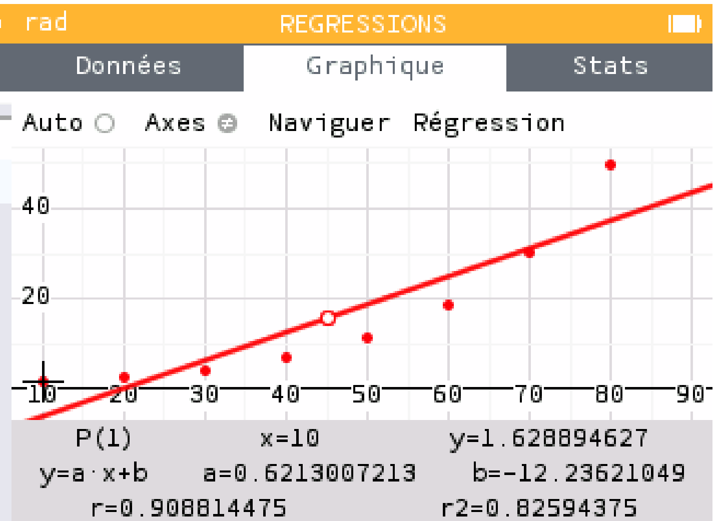
4. Transformation des données

Il arrive que certains nuages aient une “forme particulière”... qui n’est pas rectiligne.

Considérons la production d’énergie renouvelable depuis 1940, exprimée en megawatt.

Année	1950	1960	1980	1990	2000	2010	2020	2030
x_i	10	20	30	40	50	60	70	80
y_i	1.628	2.653	4.322	7.03	11.46	18.68	30.42	49.56

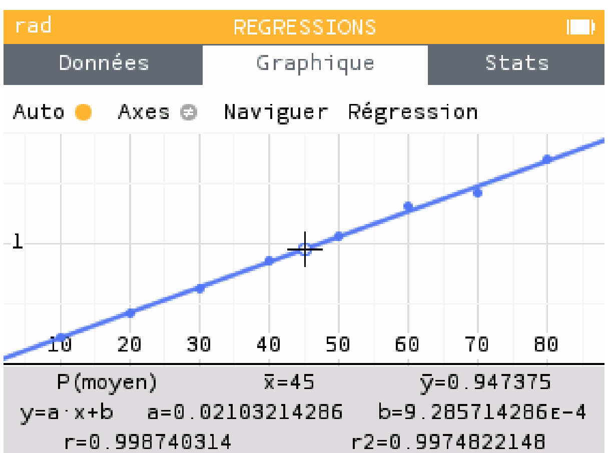




Le nuage n’est pas rectiligne mais *courbe* et présente une évolution *exponentielle*.

On est tenté de le rectifier avec la fonction log.

Voici ce qu’on obtient avec la transformation $Z = \log(Y)$



On constate que le nuage est *plus rectiligne* et que le coefficient de corrélation linéaire est plus proche de 1.

La regression linéaire de ce nuage est donc meilleure que celle du nuage initial.

Application Extrapoler la valeur de Y pour $X = 90$

1. On donne d’abord la valeur de Z correspondant en utilisant la regression $z = 0.021x + 0.0009286$

   $z = 0.021 \times 90 + 0.0009286 \approx 1.8909286$

2. On effectue la transformation *inverse* de $Z = \log(Y) \iff 10^Z = Y$

   On remplace et $y = 10^{1.8909286} \approx 77.89$