7. Fonctions logarithme décimal

Terminale STMG

qkzk

Fonction logarithme décimal

1. Définition et propriétés

Soit la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = 10^x$.

L'équation $10^x = b$, avec $b > 0$ admet une unique solution dans $\mathbb{R}$

Cette solution se note $\log b$.

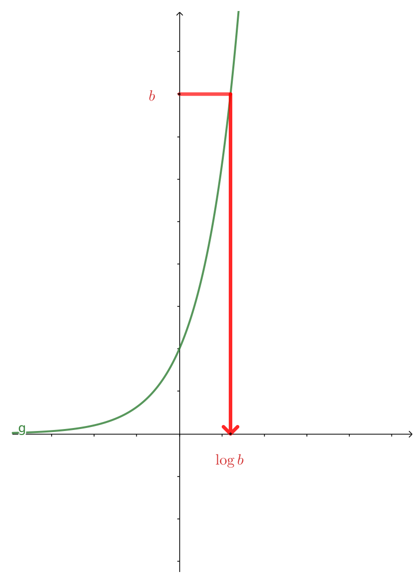

Figure 1: Le logarithme comme unique solution

Définition On appelle **logarithme décimal** d'un réel strictement positif b, l'unique solution de l'équation $10^x = b$.

On la note $\log b$.

La **fonction logarithme décimal** est définie sur $]0; +\infty[$.

Propriétés

1. Pour tout $b > 0$, $10^x = b \iff x = \log b$
2. $\log 10^x = x$
3. $10^{\log x} = x$, pour tout $x > 0$

2. Représentation graphique

La fonction logarithme décimal est croissante sur $]0;+\infty[$

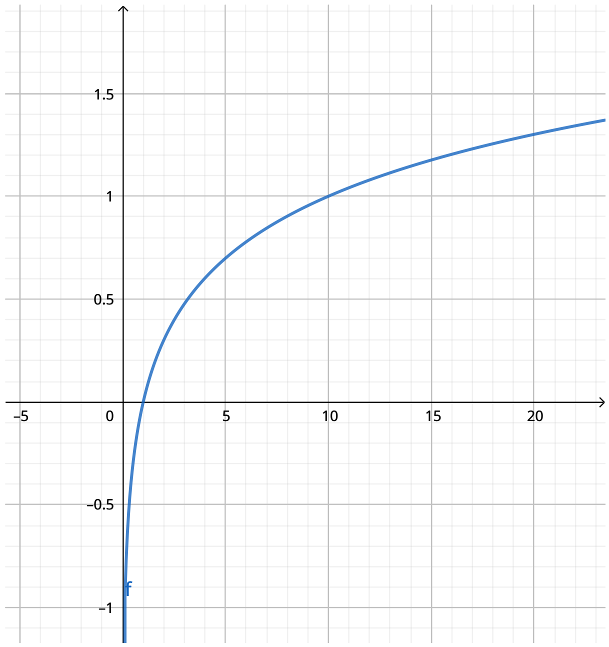

Figure 2: Le logarithme décimal

Valeurs remarquables $\log 1 = 0$, $\log 10 = 1$, $\log \dfrac{1}{10} = -1$

3. Propriétés algébriques

Le logarithme transforme les produits en somme Pour tout $a > 0$ et $b > 0$ on a : $\log(ab) = \log(a) + \log(b)$

Exemple Simplifier $A = \log(2-\sqrt{2}) + \log(2+\sqrt{2})$

$$A = \log(2-\sqrt{2}) + \log(2+\sqrt{2}) = \log\left((2-\sqrt{2})(2+\sqrt{2})\right)$$
$$A = \log\left(2^2 - \sqrt{2}^2\right) = \log(4-2) = \log(2)$$

Le logarithme transforme les quotients en soustraction Pour tout $a > 0$ et $b > 0$ on a : $\log\left(\dfrac{a}{b}\right) = \log(a) - \log(b)$

Exemple Simplifier $B = \log(50) - \log(10)$.

$$B = \log(50) - \log(10) = \log\left(\frac{50}{10}\right) = \log(5)$$

Le Logarithme "sort" les puissances Pour tout $a > 0$ et $n \in \mathbb{R}$, on a $\log(a^n) = n\log(a)$

Exemple Simplifier $C = 2\log 5 - 4\log 3 + \log 2$

$$C = 2\log 5 - 4\log 3 + \log 2 = \log 5^2 - \log 3^4 + \log 2$$

$$C = \log\left(\frac{5^2 \times 2}{3^4}\right) = \log\left(\frac{50}{81}\right)$$

4. Équations et inéquations

Le logarithme permet de résoudre certaines équations et inéquations.

1. Résoudre $5^x = 33$
2. Résoudre dans $]0; +\infty[$ l'inéquation $x^4 < 12$
3. 5 évolutions successives de $t\%$ correspondent à une augmentation de 25%. Déterminer le taux moyen.

Réponses

1. Résoudre $5^x = 33$

On applique le log à gauche et à droite :

$$5^x = 33 \iff \log(5^x) = \log(33) \iff x\log(5) = \log(33) \iff x = \frac{\log(33)}{\log(5)}$$

2. Résoudre dans $]0; +\infty[$ l'inéquation $x^4 < 12$

On applique le log de chaque côté – C'est une fonction croissante qui conserve l'ordre.

$$x^4 < 12 \iff \log(x^4) < \log(12)$$

$$\iff 4\log x < \log 12 \iff \log x < \frac{\log 12}{4}$$

$$\iff \log x < \log 12^{\frac{1}{4}}$$

On se débarasse du log en appliquant $x \mapsto 10^x$ qui est aussi une fonction croissante.

$$\iff \log x < \log 12^{\frac{1}{4}} \iff 10^{\log x} < 10^{\log 12^{\frac{1}{4}}}$$

$$\iff x < 12^{\frac{1}{4}}$$

On peut remarquer la simplicité de l'expression finale :

$$x^4 < 12 \iff x < 12^{\frac{1}{4}}$$

L'ensemble des solutions est $\left]0; 12^{\frac{1}{4}}\right[$

3. Déterminer le taux moyen si 5 évolutions successives de $t\%$ correspondent à une augmentation de 25%.

Pour un prix P, les cinq évolutions correspondent à $P \times \left(1 + \frac{t}{100}\right)^5 = P \times 1.25$

On peut simplifier P immédiatement et on doit résoudre :

$$\left(1 + \frac{t}{100}\right)^5 = 1.25$$

On applique le même procédé qu'au dessus : appliquer le log et le simplifier ensuite :

$$\left(1 + \frac{t}{100}\right)^5 = 1.25 \iff \log\left(1 + \frac{t}{100}\right)^5 = \log 1.25$$

$$\iff 5\log\left(1 + \frac{t}{100}\right) = \log 1.25 \iff \log\left(1 + \frac{t}{100}\right) = \frac{1}{5}\log 1.25$$

$$\iff \log\left(1+\frac{t}{100}\right) = \log 1.25^{\frac{1}{5}} \iff 1+\frac{t}{100} = 1.25^{\frac{1}{5}} \iff \frac{t}{100} = 1.25^{\frac{1}{5}} - 1$$

$$\iff t = 100 \times \left(1.25^{\frac{1}{5}} - 1\right) \approx 4.564$$

Le taux d'évolution annuel moyen est donc d'environ 4.564%.