3. Probabilités conditionnelles

Terminale STMG

qkzk

Probabilités conditionnelles

1. Rappels sur les probabilités

Lorsqu'on rencontre un phénomène *aléatoire* (appelé *expérience*) on définit des *événéments* (ensembles de *résultats possibles*).

On mesure la *probabilité* d'un événement comme étant la chance qu'il se réalise.

Si tous les résultats ont la même probabilité d'apparaître (*équiprobabilité*) alors la probabilité d'un événement A est

$$P(A) = \frac{\text{Nombre d'issues de} A}{\text{Nombre total d'issues}}$$

- Les probabilités sont comprises entre 0 et 1.
- Le complémentaire de A, noté $\bar{A}$ vérifie $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$.

2. Notion de probabilité conditionnelle

Définition Soit A et B deux événements avec $P(A) \neq 0$. On appelle **probabilité conditionnelle** de B sachant A la probabilité que l'événement B se réalise sachant que l'événement A est réalisé. Elle est notée $P_A(B)$ et est définie par :

$$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Exemple Considérons une urne contenant 30 boules donc 10 sont rouges et 20 sont noires.

- 5 boules rouges sont marquées d'un "V".
- 15 boules noires sont marquées d'un "V".
- Les autres boules ne sont pas marquées.

On prélève une boule au hasard dans l'urne.

- On note "V" l'événement : "La boule est marquée d'un 'V' ",
- On note "P" l'événement : "La boule n'est pas marquée d'un 'V' ",
- On note "R" l'événement : "La boule est rouge",
- On note "N" l'événement : "La boule est noire".

Quelle est la probabilité que La boule soit marquée sachant qu'elle est rouge ?

Ainsi $R \cap V$ désigne l'événement : "La boule est rouge et est marquée d'un 'V' ".

La probabilité de R est $P(R) = \dfrac{10}{30} = \dfrac{1}{3}$.

La probabilité de $R \cap V$ est $\dfrac{5}{30} = \dfrac{1}{6}$.

La probabilité de l'événement : "La boule est marquée sachant qu'elle est rouge" est :

$$P_R(V) = \frac{P(R \cap V)}{P(V)} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{3}} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

On peut aussi inverser la condition :

Quelle est la probabilité que la boule soit rouge sachant qu'elle est marquée ?

Il nous faut calculer la probabilité que la boule soit marquée : $P(V) = \dfrac{5+15}{30} = \dfrac{2}{3}$.

La probabilité de l'événement : "La boule est rouge sachant qu'elle est marquée" est :

$$P_V(R) = \frac{P(R \cap V)}{P(R)} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{2}{3}} = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}$$

Propriété Si $P(A) \neq 0$ alors $P(A \cap B) = P(A)P_A(B)$

3. Arbre pondéré

Exemple En reprenant l'exemple précédent, qu'on peut résumer ainsi :

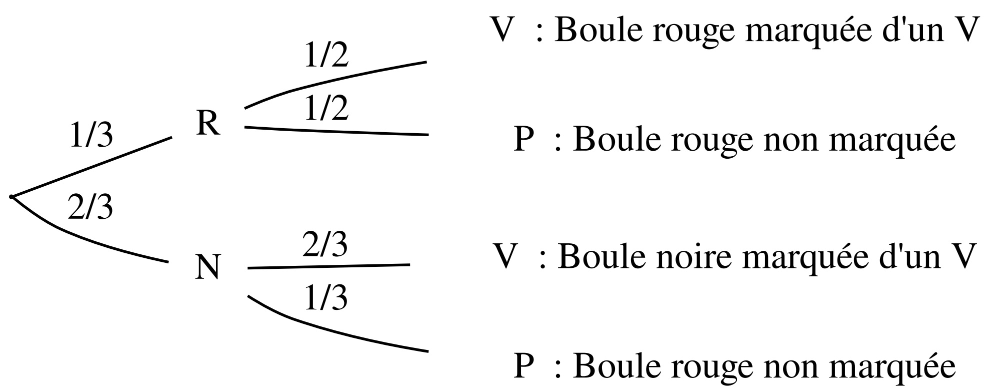

Figure 1: Arbre probabilisé

Propriété La somme des branches issues d'un même noeud vaut 1.

Par exemple, en partant du noeud N on a $P_N(V) + P_N(P) = \dfrac{2}{3} + \dfrac{1}{3}$.

Commentaires

- Le noeud tout à gauche représente l'univers tout entier : toutes les issues possibles.
- On indique *les probabilité conditionnelles* des événements issue d'un noeud.
- Généralement l'énoncé permet de construire *un* arbre probabilisé…
  Mais *il en existe toujours deux* : selon qu'on conditionne par un critère (la couleur) ou l'autre (être marqué d'un "V").

Propriété La probabilité d'une feuille (extrémité d'un chemin) est égale au produit des probabilités des branches menant à cette feuille.

Ainsi, $P(N \cap V) = \dfrac{2}{3} \times \dfrac{2}{3} = \dfrac{4}{9}$.

Formule des probabilités totales La probabilité d'un événement apparaissant dans plusieurs feuilles est la somme des probabilités de ces feuilles.

Par exemple, $P(P) = P(R \cap P) + P(N \cap P) = \dfrac{1}{3} \times \dfrac{1}{2} + \dfrac{2}{3} \times \dfrac{1}{3} = \dfrac{1}{6} + \dfrac{2}{9} = \dfrac{7}{18}$

- On repère toutes les feuilles associées à l'événement.
- On calcule la probabilité de chacune
- On ajoute. Et voilà !

4. Indépendance

L'indépendance est une notion fondamentale qui permet de simplifier des situations complexes. Elle mesure l'influence d'un phénomène sur un autre.

Définition

Deux événements A et B de probabilité non nulle sont *indépendants* si $P_A(B) = P(B)$.

Réciproquement, A et B sont *indépendants* si $P_B(A) = P(A)$.

Intuition Certains événements sont “intuitivement indépendants” comme “j'arrive à l'heure au lycée” et “la prochaine personne que je croise est un homme”. Il n'y aucune *influence* de mon trajet sur la probabilité de rencontrer des hommes ou des femmes.

Par contre, d'autres ont “intuitivement” une influence l'un sur l'autre comme “il neige aujourd'hui” et “j'arrive à l'heure au lycée”. S'il neige, le bus (ou mon train) risque plus souvent d'être en retard.

Exemple : l'urne En reprenant l'exemple précédent, on a $P(P) = \dfrac{7}{18}$ et $P_R(P) = \dfrac{1}{6}$.

$\dfrac{1}{6} \neq \dfrac{7}{18}$, les événements “Tirer une boule rouge” et “Tirer une boule non marquée” ne sont pas indépendants.

Il y a une influence de l'apparition de la *couleur* sur l'apparition d'une boule *marquée ou non.*

Exemple : les cartes On considère un jeu de 32 cartes.[1] On tire une carte au hasard.

On note A l'événement : “Tirer un as” et P l'événement : “Tirer un pique”.

Ces événements sont-ils indépendants ?

- $P(A) = \dfrac{4}{32} = \dfrac{1}{8}$
- $P_P(A) = \dfrac{P(A \cap P)}{P(P)} = \dfrac{\frac{1}{32}}{\frac{8}{32}} = \dfrac{1}{8}$

Ces événements sont indépendants.

Il n'y a pas d'influence de la *couleur* sur le fait d'avoir ou non un as.

Exemple : les cartes, mais je triche Imaginons maintenant que je triche et laisse l'As de carreau dans la boite…

Posons-nous la même question : A et P sont-ils indépendants ?

- $P(A) = \dfrac{3}{31}$
- $P_P(A) = \dfrac{P(A \cap P)}{P(P)} = \dfrac{\frac{1}{31}}{\frac{8}{31}} = \dfrac{1}{8}$

$\dfrac{3}{31} \neq \dfrac{1}{8}$ donc les événements A et P ne sont pas indépendants.

Indépendance $\neq$ incompatible

- indépendant = pas d'influence : $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$
- incompatible = l'intersection est impossible : $P(A \cap B) = 0$

Par exemple, les événements “j'arrive à l'heure” et “mon reveil n'a pas sonné” sont *incompatibles.*

[1] Un jeu de 32 cartes comporte 4 couleurs (pique, coeur, carreau, trefle) qui comportent chacune 8 cartes : 7, 8, 9, 10, Valet, Dame, Roi, As.

5. Utiliser l'indépendance

Exemple Une chaîne d'assemblage produit des pièces qui peuvent avoir un défaut A ou un défaut B.

On prélève une pièce au hasard à l'issue de la production.

On note A : "Avoir un défaut A" et B : "Avoir un défaut B".

On suppose que les événements A et B sont indépendants.

On a mesuré que la probabilité du défaut A est $\dfrac{1}{1000}$ et celle du défaut B est $\dfrac{1}{2000}$.

1. Quelle est la probabilité qu'une pièce présente les deux défauts ?
2. Quelle est la probabilité qu'une pièce présente au moins un défaut.

Répondons :

1. On veut calculer $P(A \cap B)$.

   $P(A \cap B) = P(A) \times P_A(B) = P(A) \times P(B)$ car A et B sont indépendants.

   $P(A \cap B) = 0.001 \times 0.0005 = 0.000005$.

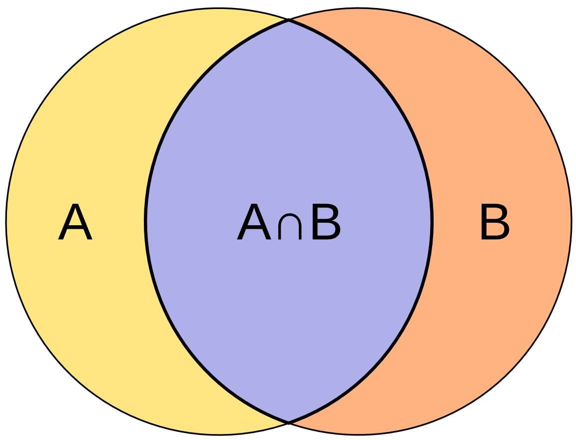

Figure 2: Intersection

2. On veut calculer $P(A \cup B)$. Utilisons $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

   $P(A \cup B) = 0.001 + 0.0005 - 0.000005 = 0.0014995$

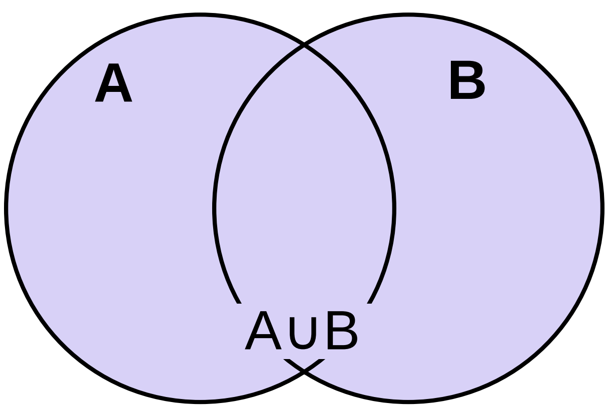

Figure 3: Réunion