2. Fonction Inverse

Terminale STMG

qkzk

Fonction inverse

Définition et représentation graphique

Définition La fonction inverse est définie sur $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ par $f(x) = \dfrac{1}{x}$.

Valeurs

x	-2	-1	-0.5	0	0.5	1	2
$\dfrac{1}{x}$	-0.5	-1	2	x	2	1	0.5

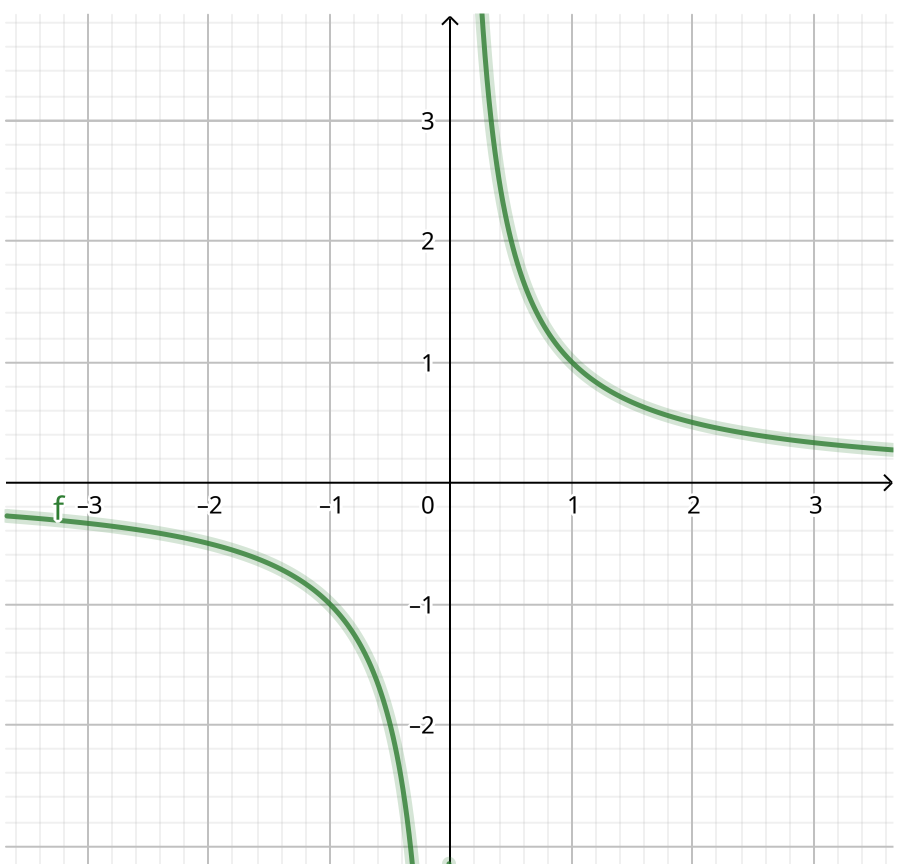

Figure 1: L'hyperbole de la fonction inverse

Représentation graphique Le graphe de la fonction inverse est une *hyperbole* de centre O, symétrique par rapport à l'origine.

Dérivée et variations

Dérivée La fonction dérivée de la fonction inverse : $\left(\dfrac{1}{x}\right)' = -\dfrac{1}{x^2}$

Démonstration Avec $f(x) = \dfrac{1}{x}$.

Calculons le taux d'accroissement entre a et $a+h$:

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \frac{\frac{1}{a+h}-\frac{1}{a}}{h} = \frac{\frac{a}{a(a+h)}-\frac{a+h}{a(a+h)}}{h} = \frac{\frac{-h}{a(a+h)}}{h} = \frac{-h}{ah(a+h)} = \frac{-1}{a(a+h)}$$

Lorsqu'on fait tendre h vers 0, l'expression précédente tend vers $-\dfrac{1}{a^2}$

Variations La fonction inverse est décroissante sur $]-\infty;0[$ et est décroissante sur $]0;+\infty[$.

Limites : comportement à l'infini

En $+\infty$

Lorsque x devient grand, $\dfrac{1}{x}$ devient proche de 0.

Pensez le ainsi : vous avez 1 gateau à diviser en x invités.

Avec 3 invités, ça va, chacun mange un tiers, avec 1000 invités, chacun mange $\dfrac{1}{1000} = 0.001$ *gateau...*

x	1	10	100	1000	10000
$\dfrac{1}{x}$	1	0.1	0.01	0.001	0.0001

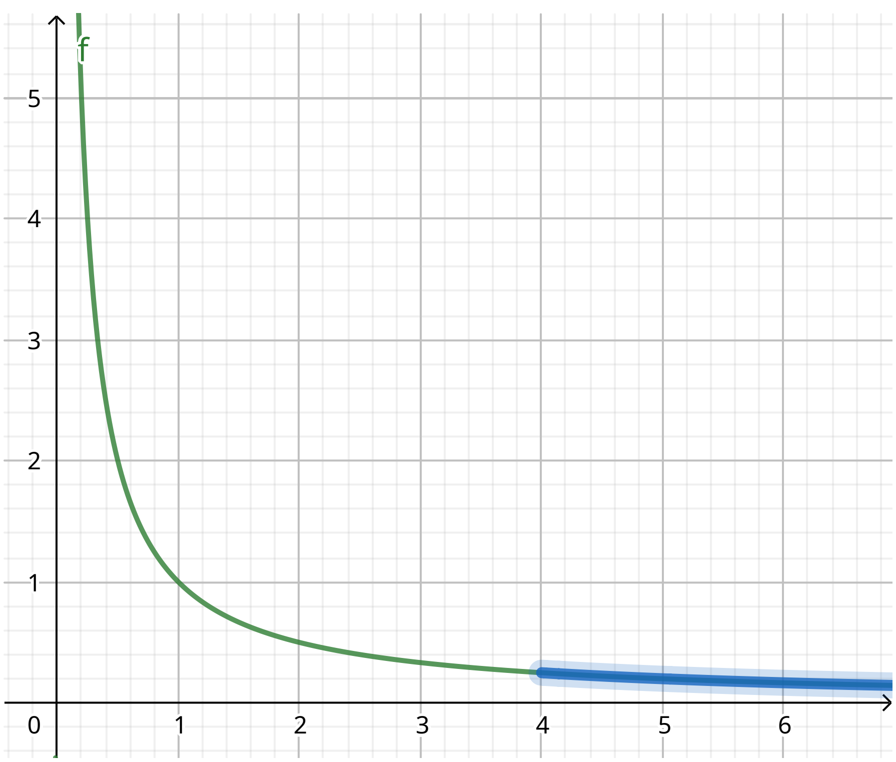

Figure 2: Asymptote en plus l'infini

Graphiquement : plus x devient grand, plus la courbe s'approche de l'axe des abscisses.

En $-\infty$

Lorsque x devient grand "chez les négatifs", $\frac{1}{x}$ devient proche de 0 (*mais toujours négatif*).

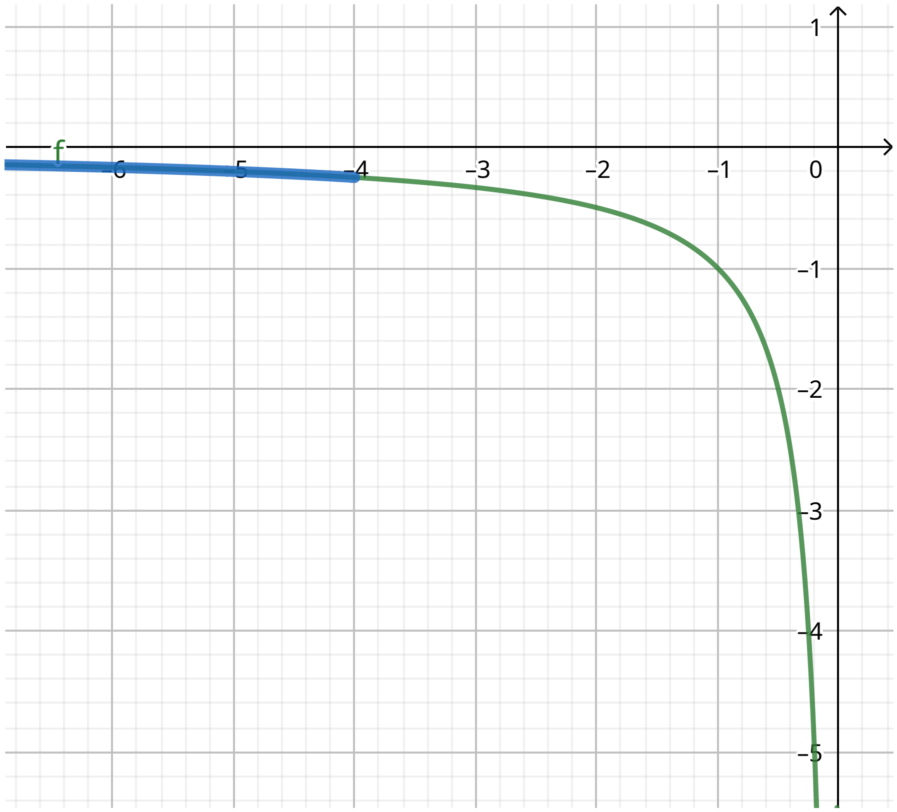

Figure 3: Asymptote en moins l'infini

Graphiquement : plus x devient négatif, plus la courbe s'approche de l'axe des abscisses.

L'axe des abscisses est une asymptote à la courbe de la fonction inverse en $+\infty$ et $-\infty$.

Étude d'une fonction

Soit $f(x) = 3 - 4x - \dfrac{1}{x}$ définie sur $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

1. Calculer la dérivée de f
2. Factoriser la dérivée et étudier son signe
3. Construire le tableau de variations
4. Représenter f dans un repère.

Formules de dérivation

Formule	Dérivée
Somme	$(f+g)' = f' + g'$
Produit par une constante k	$(kf)' = kf'$

Fonction f	Dérivée f'
a, constant	0
x	1
x^2	$2x$
x^3	$3x^2$

1. On applique la formule et :

$$f'(x) = 0 - 4 - \frac{-1}{x^2}$$

2. On factorise la dérivée après l'avoir réduite au même dénominateur :

$$f'(x) = -4 + \frac{1}{x^2} = \frac{-4x^2 + 1}{x^2} = \frac{1 - 4x^2}{x^2} = \frac{(1 - 2x)(1 + 2x)}{x^2}$$

   On résout $f(x) = 0$, on a $(1 - 2x)(1 + 2x) = 0$ et $x^2 \neq 0$ donc $x = \dfrac{1}{2}$ ou $x = -\dfrac{1}{2}$.

   Au numérateur, la fonction du second degré est de coefficient $a = -4$. Elle est du signe de -4 à l'extérieur des racine $\dfrac{1}{2}$ et $\dfrac{1}{2}$.

   Au dénominateur, tout est positif.

   Donc :

   - sur $]-\infty; -\frac{1}{2}[$, $f'(x) < 0$
   - sur $]-\frac{1}{2}; 0[$, $f'(x) > 0$
   - sur $]0; \frac{1}{2}[$, $f'(x) > 0$
   - sur $]\frac{1}{2}; +\infty[$, $f'(x) < 0$

3. Variations de f

   - sur $]-\infty; -\frac{1}{2}[$, f est décroissante,
   - sur $]-\frac{1}{2}; 0[$, f est croissante,
   - sur $]0; \frac{1}{2}[$, f est croissante,
   - sur $]\frac{1}{2}; +\infty[$, f est décroissante.

4. Figure

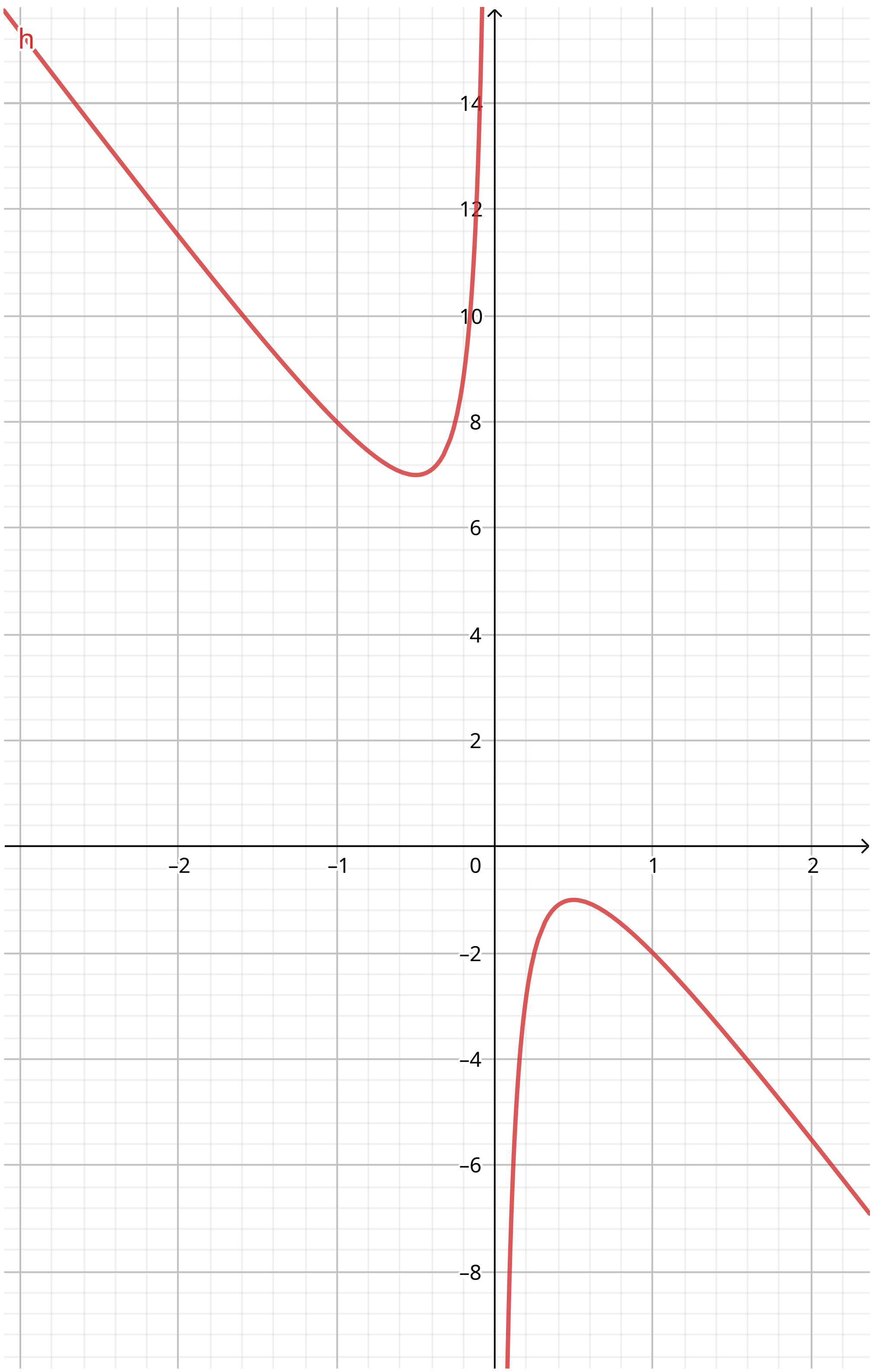

Figure 4: Représentation graphique