1. Suites arithmétiques

Terminale STMG

qkzk

Suites arithmétiques

Rappels

Suite Une *suite numérique* est une collection numérotée de nombres.

L'*indice* d'un élément de la suite est un entier, le premier indice est généralement 0.

Ainsi, la *suite des entiers naturels pairs* : $0, 2, 4, 6$ etc. peut être notée : $u_0 = 0, u_1 = 2, u_3 = 4$ etc.

Ou plus simplement : $u_n = 2n$.

Suite arithmétique Une suite est *arithmétique* si la différence de deux termes consécutifs est constante.

Lorsque c'est le cas, cette différence est appelée la *raison* de la suite et est notée r.

Définition Une suite u est arithmétique de raison r si, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n + r$.

Exemples

- La suite u définie par $u_0 = 4$ et $u_{n+1} = u_n + 5$ est arithmétique de raison 5.
- La suite v définie par $v_0 = 5$ et $v_{n+1} = 2v_n$ n'est pas arithmétique.

Méthodes

- Pour vérifier qu'une suite **n'est pas arithmétique** on se contente généralement de contredire la propriété sur les premiers termes.

  Pour la suite v, $v_0 = 5, v_1 = 10, v_2 = 20$. Les différences successives sont : 5 (entre v_0 et v_1) et 10 (entre v_1 et v_2). $5 \neq 10$ donc la suite v n'est pas arithmétique

- Pour démontrer qu'une suite **est arithmétique** il faut le prouver pour un indice quelconque.

  Considérons $w_n = 3 + 7n$. Prouvons que cette suite est arithmétique.

  1. On exprime w_{n+1} :

     $w_{n+1} = 3 + 7(n + 1) = 3 + 7n + 7 = 10 + 7n$
  2. On calcule $w_{n+1} - w_n$:

     $w_{n+1} - w_n = (10 + 7n) - (3 + 7n) = 10 + 7n - 3 - 7n = 7$
  3. Si la différence est constante (ne dépend pas de n), la suite est arithmétique. Sinon elle ne l'est pas.

     7 ne dépend pas de n donc w_n est arithémtique de raison 7.

Graphiquement Les termes d'une suite arithmétique sont alignés. On parle de **croissance linéaire**

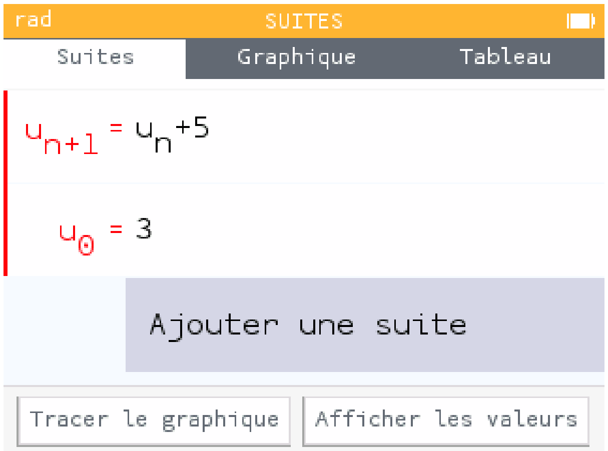
Lorsqu'on représente une suite on place en abscisse (horizontal) les indices et en ordonnée (vertical) les valeurs.

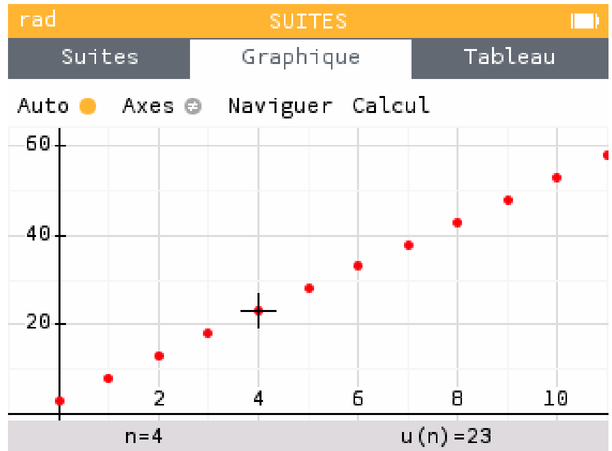
Représenter une suite sur la Numworks Lorsqu'on dispose de la relation $u_{n+1} = u_n + r$:

Par exemple avec u_3 et $u_{n+1} = u_n + 5$.

Menu **Suites**, ajouter une suite, **Récurrente d'ordre 1**, $u_{n+1} = u_n + 5$

Ensuite graphique :





Variations

Exprimer les variations d'une suite c'est dire si elle est croissante, décroissante ou ni l'un ni l'autre.

- Une suite arithmétique de raison $r > 0$ est croissante.
- Une suite arithmétique de raison $r < 0$ est décroissante.

Terme général

Le terme général d'une suite est son expression en fonction de n

Le terme général d'une suite arithmétique est de la forme $u_n = u_0 + n \times r$

Réciproque Toute suite dont le terme général s'exprime ainsi est arithmétique

Somme des termes

La somme des termes consécutifs d'une suite est la somme $u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_{n-1} + u_n$.

De l'indice 0 à l'indice n il y a $n + 1$ termes. $u_0 + u_1 + u_2 + u_3$: il y a 4 termes !

La somme des termes consécutifs d'une suite arithmétique

$$S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_n = \text{nb de termes} \times \frac{\text{1er} + \text{dernier terme}}{2}$$

Exemple On considère la suite u donnée par $u_0 = 3$ et $u_{n+1} = u_n + 5$.

Calculer la somme $S = u_0 + u_1 + \cdots + u_{10}$

1. La suite est arithmétique de raison 5 donc la formule s'applique.
2. La somme s'étend de l'indice 0 à l'indice 10 donc comporte 11 termes.
3. Le dernier terme de la somme est u_{10} qu'on calcule avec le terme général :

$$u_{10} = u_0 + 10 \times r = 3 + 10 \times 5 = 53$$

4. On remplace dans la formule :

$$S = 11 \times \frac{u_0 + u_{10}}{2} = 11 \times \frac{3 + 53}{2} = 11 \times \frac{56}{2} = 11 \times 28 = 308$$

Numworks Pour calculer la somme des termes avec la calculatrice Numworks il faut connaitre le terme général.

Menu **calculs**, touche **paste**, choisir **Analyse** puis **Somme**

$$\sum_{i=0}^{10}(3+5*i)=308$$

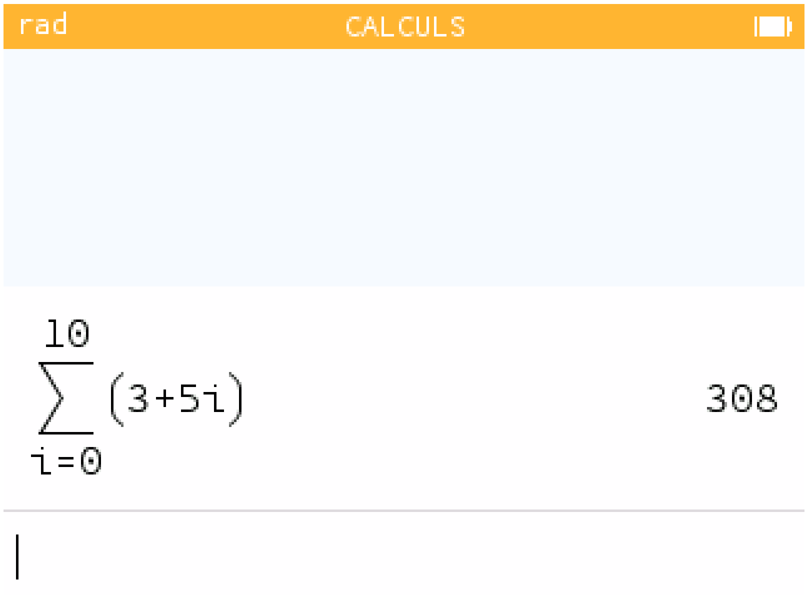


Figure 1: Numworks somme

Résumé

Résumé	Cours	Exemple
Définition	(u_n) arithmétique - de raison r, - de premier terme u_0	$r=-0.5$, $u_0=6$
Propriété	$u_{n+1}=u_n+r$	$u_{n+1}=u_n-0.5$
Variations	Si $r>0$, u est croissante Si $r<0$, u est décroissante	$r=-0.5$ La suite est décroissante
Somme	$S=\text{nb de termes}\times\dfrac{\text{1er}+\text{dernier terme}}{2}$	$u_2+\cdots+u_9=8\dfrac{u_2+u_8}{2}$
Graphe	Les points de la représentation graphique sont alignés On parle de croissance linéaire