

Droites

Chapitre 16

Contents

1. Équation de droite et fonction affine	1
2. Droites parallèles, droites sécantes	2
3. Systèmes de deux équations à deux inconnues	4

1. Équation de droite et fonction affine

Dans tout le chapitre, le plan est muni d'un repère (O, \vec{i}, \vec{j}) .

1.1. Relation

Propriété 1

1. La représentation graphique de la fonction affine $f : x \mapsto ax + b$ est une droite d qui n'est pas parallèle à l'axe des ordonnées.
2. **Réciproquement**, toute droite d non parallèle à l'axe des ordonnées admet une équation du type $y = ax + b$. Cette droite représente la fonction affine $f : x \mapsto ax + b$ associée.

Remarque 1 Si $d = (AB)$, on rappelle que le coefficient directeur a vérifie $a = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$, et que d passe par $(0, b)$. Autrement dit, l'ordonnée à l'origine b vérifie $b = y_A - ax_A$.

Démonstration : La première propriété a déjà été démontrée. Prouvons la seconde. Soit d une droite non parallèle à l'axe des ordonnées. Elle coupe donc l'axe des ordonnées en un point qu'on note A . Les coordonnées de A sont $(0; y_A)$. Il existe un point d'abscisse 1 sur d (pour la même raison). On le note B et ses coordonnées sont $B(1; y_B)$. Soit f la fonction affine définie par $f(x) = (y_B - y_A)x + y_A$. Alors $f(0) = y_A$ et $f(1) = y_B - y_A + y_A = y_B$. Autrement dit, la courbe de f est une droite qui contient A et B . C'est la droite $(AB) = d$!

1.2. Équation réduite

Propriété 2

1. Une droite d non parallèle à l'axe des ordonnées admet une équation de la forme $y = ax + b$.
2. Une droite d parallèle à l'axe des ordonnées admet une équation de la forme $x = c$.

C'est ce qu'on appelle **l'équation réduite** de la droite d .

1.3. Équation cartésienne

Définition 1 Soit a, b, c trois nombres réels. Une équation du type $ax + by + c = 0$ est une **équation cartésienne**.

Exemple 1 $4x + 2y - 6 = 0$ est une équation cartésienne. Elle est équivalente à $2y = -4x + 6$, donc à $y = -2x + 3$.

Propriété 3 Toutes les équations cartésiennes $ax + by + c = 0$ ont pour ensemble de solutions $M(x; y)$ des droites du plan. Qui plus est, elles peuvent toutes se réduire soit en $y = c$, soit en $y = mx + p$. Autrement dit, il est toujours possible de **réduire** une équation cartésienne.

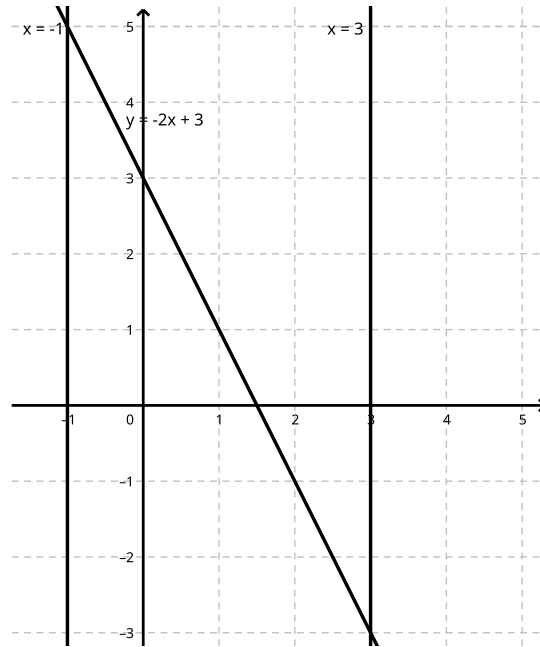


Figure 1: Équation réduite

2. Droites parallèles, droites sécantes

2.1. Parallélisme

Théorème 1 Deux droites d et d' d'équations respectives $y = ax + b$ et $y = a'x + b'$ sont parallèles si et seulement si $a = a'$. Autrement dit, elles sont parallèles si et seulement si elles ont le même coefficient directeur.

Exemple 2 Les droites d et d' d'équations respectives $y = \frac{1}{2}x + 2$ et $y = \frac{1}{2}x - 1$ sont parallèles.

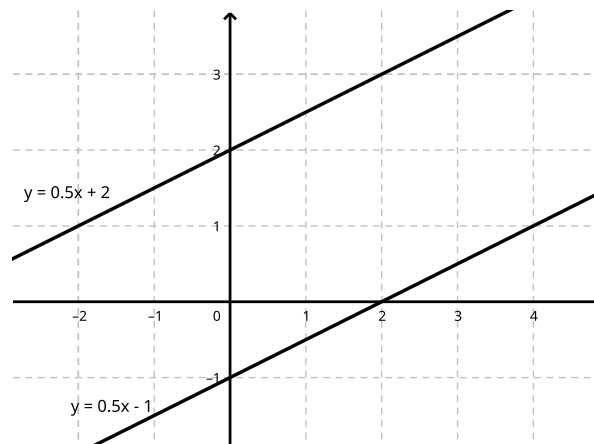


Figure 2: Droites parallèles

2.2. Alignement

Théorème 2 Trois points A, B et C sont alignés :

- si et seulement si les coordonnées de C vérifient l'équation de (AB) ,
- si et seulement si (AB) et (AC) ont le même coefficient directeur.

Exemple 3 Soit $A(-2; -3)$, $B(3; 6)$, $C(6; 11)$ et $D(-3; -4)$:

- Les coefficients directeurs de (AB) et (AC) sont $\frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{9}{5}$ et $\frac{y_C - y_A}{x_C - x_A} = \frac{7}{4}$. Donc A, B et C ne sont pas alignés.
- Les coefficients directeurs de (BC) et (BD) sont égaux à $\frac{5}{3}$, donc B, C, D sont alignés.

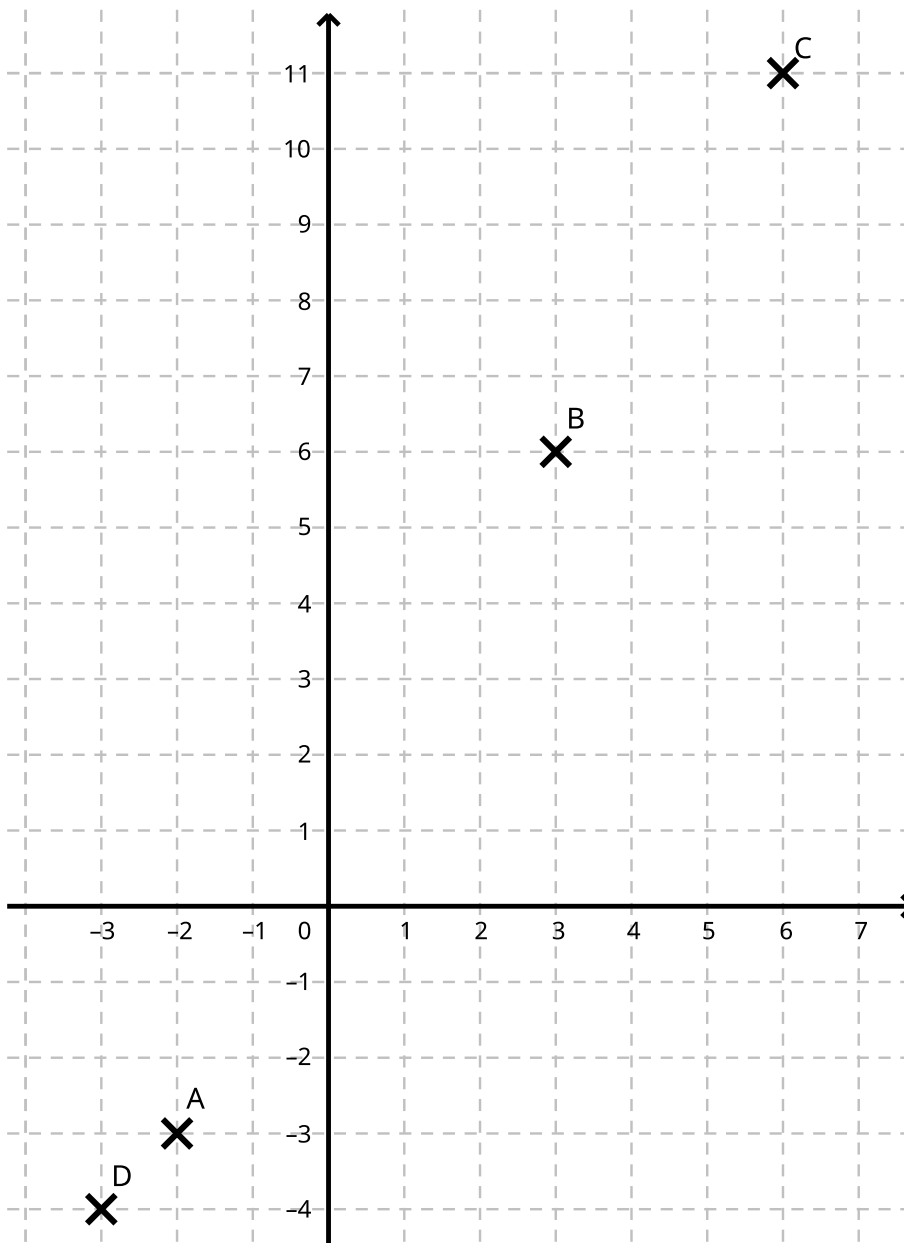


Figure 3: Aligement

2.3. Droites sécantes

Dire que deux droites du plan sont sécantes signifie qu'elles ne sont pas parallèles¹. Si elles ont toutes deux une équation de la forme $y = ax + b$ et $y = a'x + b'$, elles sont sécantes si et seulement si $a' \neq a$. Chercher le point d'intersection de d et d' c'est chercher le point qui vérifie les deux équations à la fois.

3. Systèmes de deux équations à deux inconnues

3.1. Introduction

Un système d'équations est une série d'équations délimitées par une accolade $\left\{ \right.$. Une solution doit vérifier toutes les équations à la fois. Résoudre un tel système, c'est en donner toutes les solutions.

Par exemple, le système :

$$\begin{cases} x + y = 7 \\ x - y = 1 \end{cases}$$

a deux équations $L1$ et $L2$ et deux inconnues x et y . Les équations étant affines, on dira que c'est un **système linéaire de deux équations à deux inconnues**. On peut remarquer que $(x = 4; y = 3)$ est une solution du système, car ces nombres vérifient les deux équations à la fois. Par contre, $(x = 6; y = 1)$ ne vérifie que $L1$ et n'est pas une solution du système.

Exemple 4 Système linéaire de 3 équations à 3 inconnues :

$$\begin{cases} 3x + 2y - z = 5 \\ x - 2y + 3z = 4 \\ 3x + 4y - 7z = 1 \end{cases}$$

Système de 2 équations à 2 inconnues mais non linéaire :

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 4 \\ x - y = 1 \end{cases}$$

Remarque 2 En seconde, on résout les systèmes linéaires de deux équations à deux inconnues.

3.2. Définition

Définition 2 Un **système de deux équations à deux inconnues** (S) est donné par deux équations à deux inconnues du type :

$$(S) : \begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$$

où a, b, c, a', b', c' sont des nombres fixés.

3.3. Nature des solutions

Théorème 3 Soit

$$(S) : \begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$$

Un système de deux équations à deux inconnues. Il peut se représenter comme la recherche du point d'intersection des droites $d1$ et $d2$ d'équations cartésiennes : $ax + by = c$ et $a'x + b'y = c'$. Il y a donc trois cas de figure :

- Si $d1$ et $d2$ sont sécantes en $P(x_P, y_P)$, alors (x_P, y_P) est l'unique solution du système.
- Si $d1$ et $d2$ sont strictement parallèles, alors le système n'a pas de solution.
- Si $d1$ et $d2$ sont confondues, alors toute la droite $d1$ est solution.

3.4. En pratique : graphiquement

Exemple 5 Résoudre graphiquement le système :

$$\begin{cases} 2x - 4y = -6 \\ -x + y = -1 \end{cases}$$

¹Est-ce toujours si simple ? Dans l'espace à trois dimensions, deux droites peuvent n'être ni sécantes ni parallèles !

Solution 1. On réduit chaque équation. $2x - 4y = -6$ se réduit en $y = \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$ et $-x + y = -1$ en $y = x - 1$. Elles n'ont pas le même coefficient directeur. Résoudre le système revient à trouver le point d'intersection de ces deux droites sécantes. 2. On trace les droites d_1 et d_2 dans le même repère. 3. Leur point d'intersection $P(5; 4)$ nous donne la solution du système : $x = 5; y = 4$.

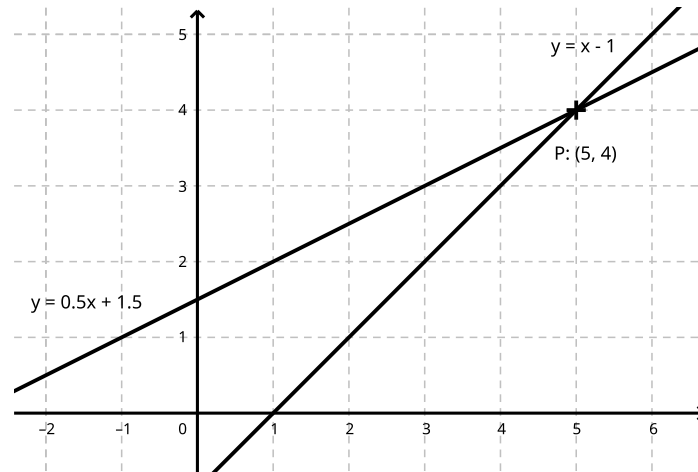


Figure 4: Résolution graphique

3.5. En pratique : algébriquement

Exemple 6 Résoudre par le calcul le système :

$$\begin{cases} 2x - 4y = -6 \\ -x + y = -1 \end{cases}$$

Il existe deux méthodes pour résoudre les systèmes d'équations linéaires.

3.5.1. Par combinaison linéaire On multiplie chaque membre de L_2 par 2 pour faire apparaître des coefficients correspondants en x :

$$\begin{cases} 2x - 4y = -6 \\ -2x + 2y = -2 \end{cases}$$

On ajoute ensuite L_1 et L_2 afin de faire disparaître les termes en x :

$$\begin{cases} 2x - 4y = -6 \\ -2y = -8 \end{cases} \iff \begin{cases} 2x - 4y = -6 \\ y = 4 \end{cases}$$

On remplace ensuite $y = 4$ dans L_1 et il vient :

$$\begin{cases} x = 5 \\ y = 4 \end{cases}$$

L'unique solution du système est bien $(5; 4)$.

3.5.2. Par substitution Nous allons isoler la variable y dans l'équation la plus simple, L_2 :

$$\begin{cases} 2x - 4y = -6 \\ y = x - 1 \end{cases}$$

On remplace ensuite y par $x - 1$ dans L_1 . On obtient alors une équation d'une seule variable qu'on peut résoudre :

$$\begin{cases} 2x - 4(x - 1) = -6 \\ y = x - 1 \end{cases} \iff \begin{cases} -2x + 4 = -6 \\ y = x - 1 \end{cases}$$

On résout alors cette équation en x et on remplace enfin dans L_2 pour obtenir y :

$$\begin{cases} x = 5 \\ y = 4 \end{cases}$$

L'unique solution du système est bien $(5; 4)$.