

# Racine carré, inverse

## Chapitre 14

---

### Contents

|   |   |
|---|---|
| 1. Fonction Inverse . . . . .                 | 1 |
| 2. Fonction Racine Carrée . . . . .           | 2 |
| 3. Compléments sur la racine carrée . . . . . | 3 |

---

### 1. Fonction Inverse

#### 1.1. Étude de la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$

**Définition 1** La fonction inverse est définie sur  $\mathbb{R}^*$  par  $f(x) = \frac{1}{x}$ .  $\mathbb{R}^*$  est l'ensemble des réels non nuls.

#### Exemple 1

- $f(-2) = \frac{1}{-2} = -0.5$ ,
- $f(3) = \frac{1}{3}$ ,
- $f\left(\frac{5}{3}\right) = \frac{1}{\frac{5}{3}} = \frac{3}{5}$ ,
- $f(10^5) = \frac{1}{10^5} = 10^{-5}$ ,
- $f(10^{-3}) = \frac{1}{10^{-3}} = 10^3$ .

Mais attention, 0 n'a pas d'image par  $f$ .

**Définition 2** On dit que  $x = 0$  est une **valeur interdite** de la fonction inverse.

#### Propriété 1

La fonction inverse est :

- strictement décroissante sur  $] -\infty; 0[$ ,
- strictement décroissante sur  $]0; +\infty[$ .

|               |           |             |           |
|---------------|-----------|-------------|-----------|
| $x$           | $-\infty$ | $0$         | $+\infty$ |
| $\frac{1}{x}$ |           | $\parallel$ |           |

**Remarque 1** La fonction inverse n'est ni linéaire, ni affine. L'inverse d'une somme n'est pas la somme des inverses :  $\frac{1}{2} + \frac{1}{5} \neq \frac{1}{2+5}$ .

## 1.2. Hyperbole d'équation $y = \frac{1}{x}$

La fonction inverse est représentée par une courbe appelée **hyperbole**. Elle est constituée de tous les points  $M(x, \frac{1}{x})$ , pour  $x \neq 0$ , et a pour équation  $y = \frac{1}{x}$ . Comme 0 n'a pas d'image, il n'y a pas de point d'abscisse 0 sur l'hyperbole d'équation  $y = \frac{1}{x}$ .

### Propriété 2

- L'hyperbole d'équation  $y = \frac{1}{x}$  admet l'origine comme centre de symétrie.
- La fonction inverse est impaire sur  $\mathbb{R}^*$ .

**Démonstration** Pour n'importe quel réel  $x$  non nul, on a  $\frac{1}{-x} = -\frac{1}{x}$ . Les points  $M(x; \frac{1}{x})$  et  $M'(-x; -\frac{1}{x})$  appartiennent tous les deux à la courbe et sont symétriques par rapport à l'origine. L'origine est donc un centre de symétrie de cette hyperbole.

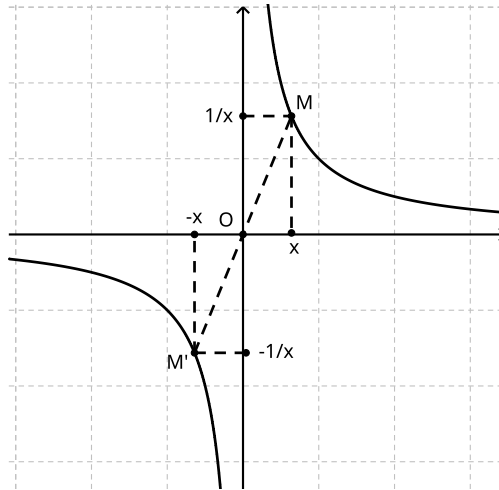


Figure 1: L'hyperbole d'équation  $y = 1/x$

## 2. Fonction Racine Carrée

### 2.1. Étude de la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$

**Définition 3** Soit  $x$  un nombre réel positif ou nul. La *racine carrée* de  $x$ , notée  $\sqrt{x}$ , est l'unique réel positif ou nul qui, élevé au carré, donne  $x$ . On a donc, pour tout  $x \geq 0$ ,  $\sqrt{x} \geq 0$  et  $\sqrt{x^2} = x$ .

**Définition 4** La fonction racine carrée est définie sur  $\mathbb{R}_+ = [0; +\infty[$  par  $f(x) = \sqrt{x}$ .

### Exemple 2

- $\sqrt{-2}$  n'est pas défini car  $-2 < 0$ ,
- $\sqrt{1} = 1$ ,
- $\sqrt{4} = 2$  et, pour tout nombre s'écrivant  $x = p^2$ , avec  $p \geq 0$ ,  $\sqrt{x} = p$ ,
- $\sqrt{2} \approx 1.41421$ ,
- $\sqrt{100} = 10$ ,
- $\sqrt{1000} \approx 31.623$ ,
- $\sqrt{0.25} = 0.5$ .

**Propriété 3** La fonction racine carrée est strictement croissante sur  $[0; +\infty[$ .

|            |   |           |
|------------|---|-----------|
| $x$        | 0 | $+\infty$ |
| $\sqrt{x}$ | 0 | ↗         |

**Remarque 2** - La fonction racine carrée n'est ni linéaire, ni affine. - Elle n'est pas non plus paire ou impaire.

### 2.2. Courbe d'équation $y = \sqrt{x}$

La courbe de la fonction racine carrée est une moitié de parabole qui a subi une rotation de  $45^\circ$ .



Figure 2: Racine carré

### 3. Compléments sur la racine carrée

#### 3.1. Propriétés algébriques

**Propriété 4** Pour tout réel positif  $x$  s'écrivant  $x = p^2$  avec  $p \in \mathbb{N}$ ,  $\sqrt{x} = p$ .

**Exemple 3** -  $\sqrt{16} = 4$ , -  $\sqrt{30} \approx 5.477$ .

**Propriété 5** Pour tout  $a \geq 0$ ,  $\sqrt{a^2} = a$ . Pour tout  $a \in \mathbb{R}$ ,  $\sqrt{a^2} = |a|$ .

**Propriété 6 : Racine carrée et produits** Pour tout  $a$  et  $b$  positifs, on a : -  $\sqrt{a \times b} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}$ , - si  $b \neq 0$ ,  $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$ .

**Exemple 4** -  $\sqrt{400} = \sqrt{4} \times \sqrt{100} = 2 \times 10 = 20$ , -  $\sqrt{\frac{1}{16}} = \frac{\sqrt{1}}{\sqrt{16}} = \frac{1}{4}$ .

**Remarque 3** Généralement,  $\sqrt{a+b} \neq \sqrt{a} + \sqrt{b}$  et  $\sqrt{a-b} \neq \sqrt{a} - \sqrt{b}$ .

#### 3.2. Irrationalité de $\sqrt{2}$

**Propriété 7**  $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ . Autrement dit, il n'existe aucun couple d'entiers naturels  $p$  et  $q$  vérifiant  $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$ .

**Remarque 4** - On peut obtenir une égalité *approchée* aussi fine que l'on veut de  $\sqrt{2}$  par des rationnels. - On dit que  $\sqrt{2}$  est *irrationnel*. Il existe une infinité de nombres irrationnels, comme  $\pi$  ou  $\sqrt{3}$ , etc.

**Preuve :  $\sqrt{2}$  est irrationnel**

Supposons le contraire. Nous allons démontrer que c'est impossible. On suppose donc disposer de deux entiers naturels  $p$  et  $q$  vérifiant  $\frac{p}{q} = \sqrt{2}$  (E). On suppose de plus que cette fraction est *irréductible*. On peut toujours simplifier une fraction jusqu'à ce qu'elle le devienne.

D'après ce qu'on a vu plus haut, il est possible d'élever au carré pour simplifier la racine carrée. On élève l'égalité (E) au carré :

$$\left(\frac{p}{q}\right)^2 = \sqrt{2}^2 \Leftrightarrow \frac{p^2}{q^2} = 2 \Leftrightarrow p^2 = 2q^2 \quad (E)$$

Pour démontrer que cette égalité est impossible, nous allons nous intéresser au chiffre des unités des deux membres de l'égalité  $p^2 = 2q^2$ . Le membre de gauche est un carré. Le membre de droite est le double d'un carré. On sait déjà que le chiffre des unités du membre de droite est 0, 2, 4, 6 ou 8, mais nous allons pousser plus loin ce raisonnement.

Notons  $u$  le chiffre des unités du nombre  $p$ . On sait donc que  $p = 10a + u$ , où  $a$  est un entier. Par exemple, si  $p = 31$ ,  $p = 10 \times 3 + 1$ . Dans tous les cas,  $p^2 = (10a + u)^2 = 100a^2 + 20a \times u + u^2 = 10 \times (10a^2 + 2a \times u) + u^2$ . Donc le dernier chiffre de  $p^2$  est le même que le dernier chiffre de  $u^2$ .

| $u$                      | 0 | 1 | 2 | 3 | 4  | 5  | 6  | 7  | 8  | 9  |
|--------------------------|---|---|---|---|----|----|----|----|----|----|
| $u^2$                    | 0 | 1 | 4 | 9 | 16 | 25 | 36 | 49 | 64 | 81 |
| Dernier chiffre de $p^2$ | 0 | 1 | 4 | 9 | 6  | 5  | 6  | 9  | 4  | 1  |

Le raisonnement précédent s'applique aussi au nombre  $q^2$ , qui est aussi le carré d'un entier. Nous allons maintenant donner le tableau pour le dernier chiffre du nombre  $2q^2$ . En notant  $v$  le chiffre des unités de  $q$  :

| $v$                       | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|---------------------------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Dernier chiffre de $q^2$  | 0 | 1 | 4 | 9 | 6 | 5 | 6 | 9 | 4 | 1 |
| Dernier chiffre de $2q^2$ | 0 | 2 | 8 | 8 | 2 | 0 | 2 | 8 | 8 | 2 |

Revenons maintenant à l'égalité  $p^2 = 2q^2$ . On remarque dans le tableau précédent que la seule colonne qui soit possible est celle de 0. Dans ce cas, le dernier chiffre de  $p$  et le dernier chiffre de  $q$  doit être égaux à 0. Cela signifie que  $p$  et  $q$  se terminent par 0 et sont des multiples de 10. Or, nous avons supposé que la fraction  $\frac{p}{q}$  était *irréductible*, c'est-à-dire que son numérateur et son dénominateur ne peuvent avoir de facteur commun. Il n'existe donc aucune valeur possible pour l'égalité  $p^2 = 2q^2$ . La supposition initiale est fautive. Nous avons démontré que  $\sqrt{2}$  est irrationnel.