

Configurations du plan

Chapitre 13

Contents

1. Problèmes de longueur et d'angles	1
2. Configurations du plan	3
3. Droites remarquables du triangle	6
4. Projeté orthogonal d'un point sur une droite	7

1. Problèmes de longueur et d'angles

1.1. Calculer des longueurs

Propriété 1 : Théorème de Pythagore Dans tout triangle ABC rectangle en A , on a la relation de Pythagore :

$$BC^2 = AB^2 + AC^2$$

Réciproquement, lorsque les côtés d'un triangle vérifient la relation $BC^2 = AB^2 + AC^2$, alors le triangle ABC est rectangle en A .

Remarque 1 Si $BC^2 \neq AB^2 + AC^2$, alors le triangle n'est pas rectangle en A .

Exemple 1 Dans le triangle DEF rectangle en E :

$$\begin{aligned} DF^2 &= ED^2 + EF^2 \\ \Leftrightarrow 5^2 &= 4^2 + EF^2 \\ \Leftrightarrow 25 &= 16 + EF^2 \\ \Leftrightarrow EF^2 &= 25 - 16 \\ \Leftrightarrow EF^2 &= 9 \\ \Leftrightarrow EF &= \sqrt{9} = 3 \end{aligned}$$

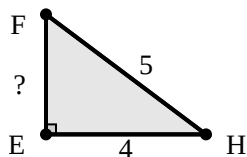


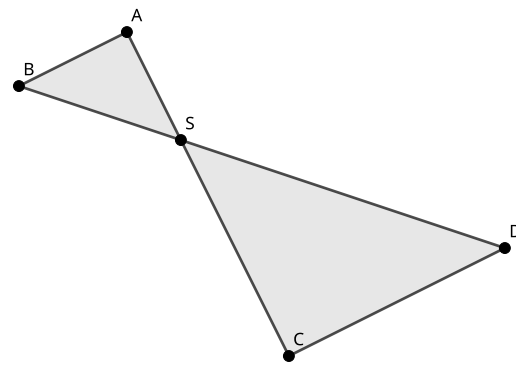
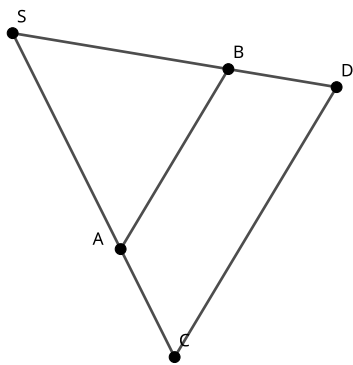
Figure 1: Triangle rectangle DEF

Propriété 2 : Théorème de Thalès

On considère l'une des configurations ci-dessous, dite de Thalès.

Si les droites (AB) et (CD) sont parallèles, alors les longueurs des triangles SAB et SDC sont proportionnelles et on a $\frac{SA}{SC} = \frac{SB}{SD} = \frac{AB}{CD}$.

Réciproquement, si les côtés des triangles SAB et SDC sont proportionnels, alors les droites (AB) et (CD) sont parallèles.



1.2. Calculer des angles

Propriété 3 : Relations trigonométriques Dans un triangle ABC rectangle en A , les côtés et les angles sont liés par des relations trigonométriques :

$$\cos \widehat{B} = \frac{AB}{BC} \quad ; \quad \sin \widehat{B} = \frac{AC}{BC} \quad ; \quad \tan \widehat{B} = \frac{AC}{AB}$$

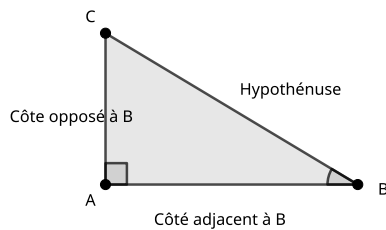


Figure 2: Triangle rectangle avec angles

Exemple 2 Dans le triangle DEF rectangle en E :

$$\begin{aligned}\cos \widehat{D} &= \frac{ED}{FD} \\ \cos \widehat{D} &= \frac{4}{5} \\ \widehat{D} &= \cos^{-1}\left(\frac{4}{5}\right) \approx 36.9^\circ\end{aligned}$$

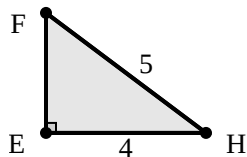


Figure 3: Triangle rectangle DEF

Remarque 2 La trigonométrie permet de calculer des longueurs ou des angles.

Propriété 4 Pour tout angle aigu α d'un triangle rectangle, on a la relation trigonométrique suivante :

$$\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1$$

Propriété 5 Dans un triangle, la somme des angles fait 180° .

Propriété 6 Deux droites parallèles et une sécante engendrent des angles alternes-internes et correspondants, de même mesure.

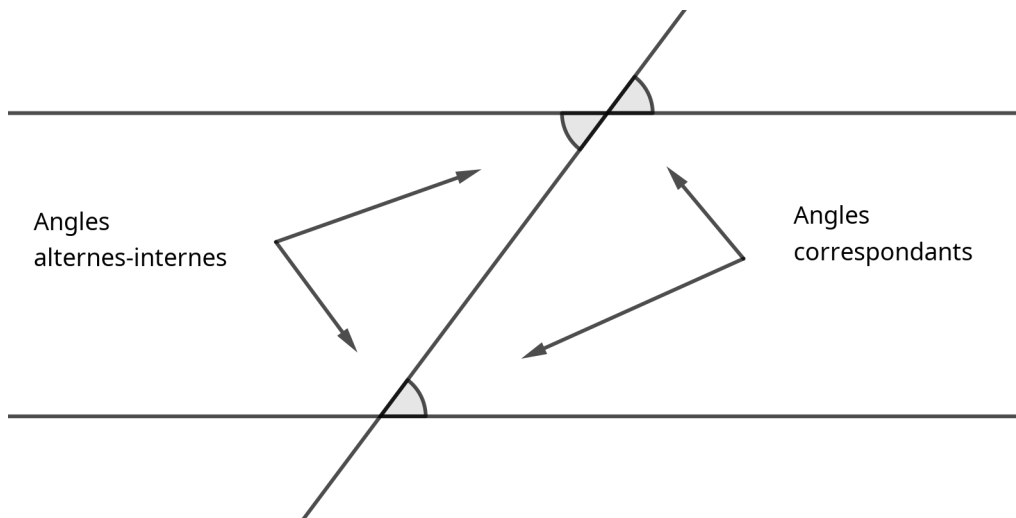
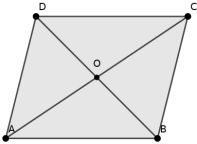
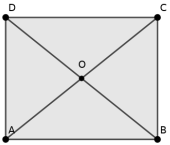
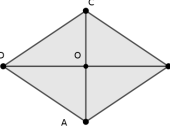
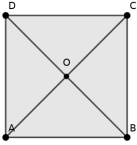


Figure 4: Alternes-internes et correspondants

2. Configurations du plan

2.1. Quadrilatères particuliers

	Les côtés	Les diagonales	Les symétries
Parallélogramme 	$(AB) \parallel (DC)$ et $(AD) \parallel (BC)$ ou $(AB) \parallel (DC)$ et $AB = DC$	Les diagonales $[AC]$ et $[BD]$ ont même milieu O .	O est le centre de symétrie
Rectangle 	C'est un parallélogramme et $(AB) \perp (AC)$	$AC = BD$	Les médiatrices de $[AD]$ et de $[AB]$ sont des axes de symétrie
Losange 	C'est un parallélogramme et $AB = AD$	$(AC) \perp (BD)$	Les diagonales sont des axes de symétrie
Carré 	C'est un parallélogramme et $(AB) \perp (AD)$, $AB = AD$	$(AC) \perp (BD)$, $AC = BD$	Les médiatrices de $[AD]$ et $[AB]$ ainsi que les diagonales sont des axes de symétrie

Exemple 3

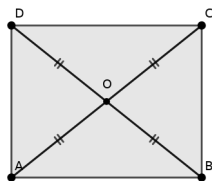


Figure 5: Rectangle 2

Le quadrilatère $ABCD$ est un parallélogramme car ses diagonales $[AC]$ et $[BD]$ se coupent en leur milieu. Ses diagonales ont la même longueur, donc c'est un rectangle.

Remarque 3 Un carré est à la fois un rectangle et un losange.

2.2. Cercles et angles

Définition 1 O est un point et r est un nombre réel strictement positif. L'ensemble des points M du plan vérifiant $OM = r$ est le cercle de centre O et de rayon r .

Vocabulaire :

- $[OA]$ est un rayon,
- $[BB']$ est un diamètre,
- $\widehat{BB'A}$ est un angle inscrit,
- \widehat{BOA} est un angle au centre,
- $[AB]$ est une corde,
- \widehat{AB} est un arc.

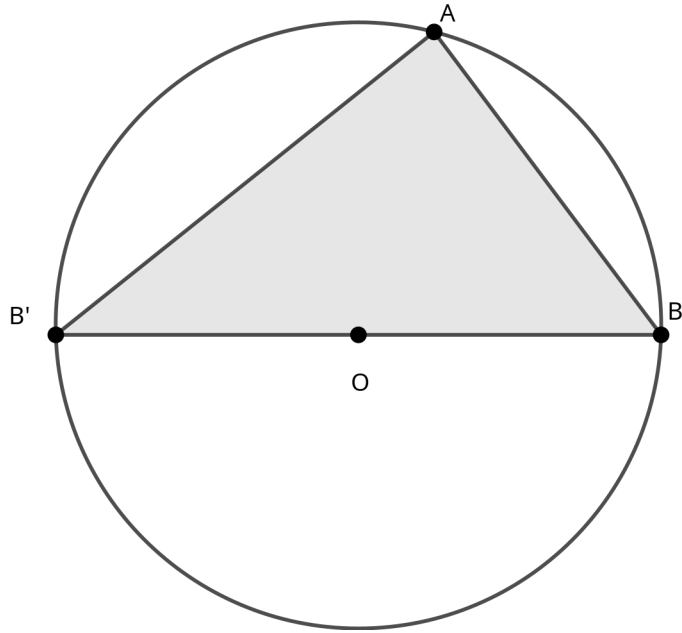


Figure 6: Cercle avec arc et corde

Propriété 7 Lorsqu'un angle inscrit α intercepte le même arc qu'un angle au centre β , alors :

$$\beta = 2\alpha$$

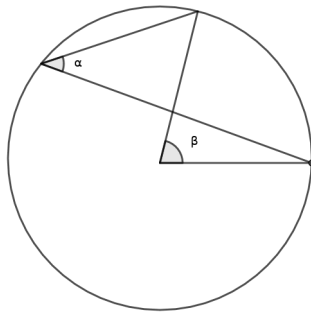
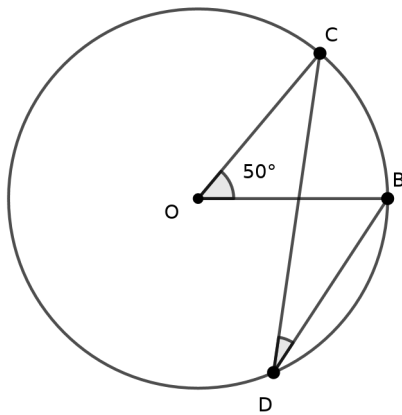


Figure 7: Angle au centre et angle inscrit



Exemple 4

Puisque l'angle au centre \widehat{BOC} intercepte le même arc \widehat{CB} que l'angle inscrit \widehat{BDC} , alors :

$$\widehat{BDC} = \frac{1}{2}\widehat{BOC} = 25^\circ$$

Définition 2 La tangente à un cercle \mathcal{C} de centre O en un point M est la droite passant par M et perpendiculaire au rayon $[OM]$. Elle coupe le cercle \mathcal{C} en l'unique point M .

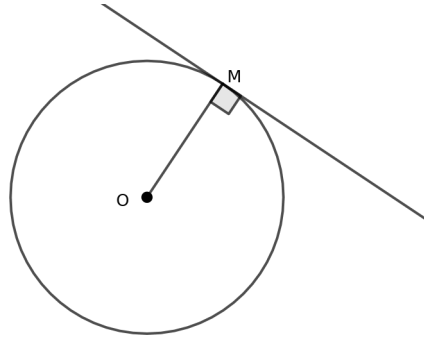


Figure 8: Tangente au cercle

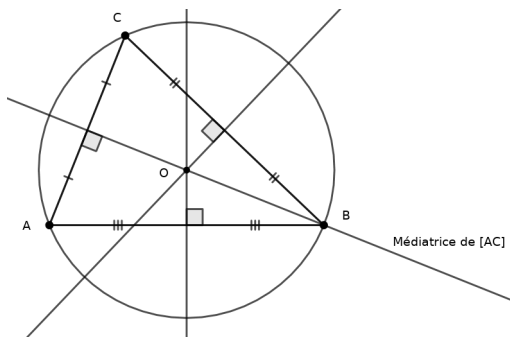
3. Droites remarquables du triangle

3.1. Médiatrices

Définition 3 La médiatrice d'un segment est l'ensemble des points du plan équidistants des extrémités de ce segment.

Propriété 8 C'est la droite passant par le milieu et perpendiculaire à ce segment.

Propriété 9 Les trois médiatrices d'un triangle sont concourantes en un point O appelé *centre du cercle circonscrit au triangle*.

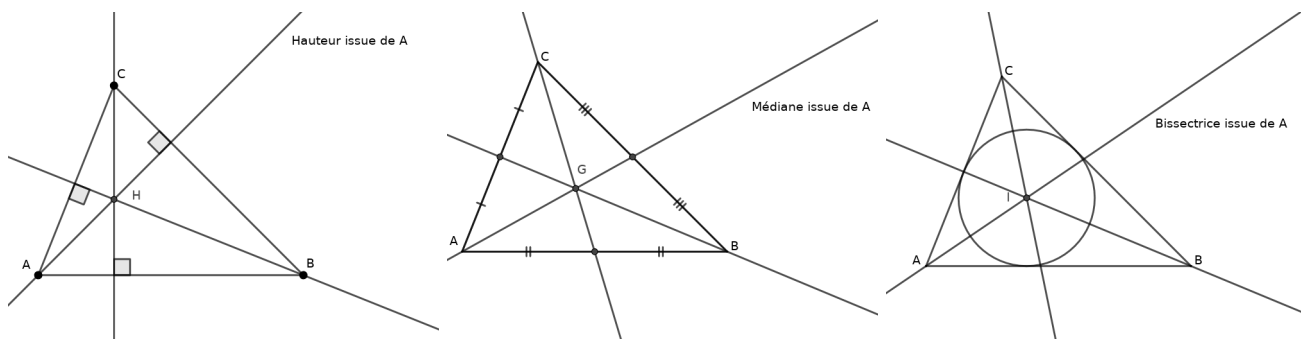


Exemple 5

Remarque 4 Lorsque le triangle est rectangle, le centre du cercle circonscrit est le milieu de l'hypoténuse.

3.2. Autres droites remarquables du triangle

Définition 4 - Une **hauteur** est une droite passant par un sommet du triangle et perpendiculaire au côté opposé à ce sommet. - Une **médiane** est une droite passant par un sommet du triangle et le milieu du côté opposé à ce sommet. - La **bissectrice** d'un angle est la demi-droite passant par un sommet de cet angle et qui le coupe en deux angles égaux.



Propriété 10 Dans un triangle : - les trois hauteurs sont concourantes en un point appelé *orthocentre du triangle*, - les trois médianes sont concourantes en un point appelé *centre de gravité du triangle*, - les trois bissectrices sont concourantes en un point appelé *centre du cercle inscrit au triangle*.

Propriété 11 Dans ABC isocèle en A , la médiane et la hauteur issue de A , la bissectrice de \widehat{A} et la médiatrice de $[BC]$ sont confondues.

4. Projeté orthogonal d'un point sur une droite

Soit D une droite du plan et A un point.

Définition 5 On appelle **projeté orthogonal** de A sur D le point d'intersection de la droite D avec la perpendiculaire à D passant par A .

Exemple 6 H est le projeté orthogonal de A sur D .

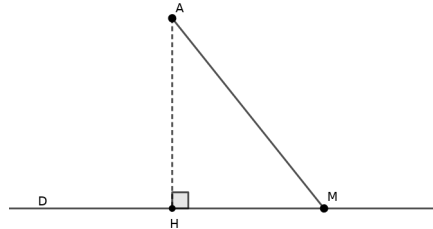


Figure 9: Projeté orthogonal

Propriété 12 La distance du point A à la droite D est la plus petite distance séparant un point de D avec A . Elle est égale à AH , où H est le projeté orthogonal du point A sur D .

Preuve Notons d la distance entre A et D . Soit M un point de D , distinct de H . Le triangle AHM est rectangle en H . Grâce au théorème de Pythagore, on peut affirmer que l'hypoténuse $[AM]$ est le plus grand des côtés du triangle AHM . Donc $AM > AH$. Ainsi, la plus petite distance séparant A d'un point de D est égale à AH . On en déduit que $AH = d$.