

Fonction carré, Fonction valeur absolue

Chapitre 12

Contents

1. La fonction carré : $x \mapsto x^2$	1
1.1. Définition et propriétés	1
1.2. Parabole d'équation $y = x^2$	1
1.3. Équations $x^2 = a$	1
2. La fonction valeur absolue : $x \mapsto x $	3
2.1 Définition et propriétés	3
2.2 Représentation graphique	3

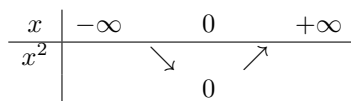
1. La fonction carré : $x \mapsto x^2$

1.1. Définition et propriétés

Définition 1 La fonction carré est définie sur \mathbb{R} par $f(x) = x^2$.

Propriété 1 La fonction carré est : - strictement décroissante sur $] -\infty; 0]$, - strictement croissante sur $[0; +\infty[$.

La fonction carré n'est ni linéaire, ni affine.



1.2. Parabole d'équation $y = x^2$

La fonction carré est représentée par une courbe appelée **parabole**. Elle est constituée de tous les points $M(x, x^2)$ et a pour équation $y = x^2$. Le point $O(0, 0)$ est son **sommet**. La fonction carré est *paire*.

Propriété 2 Dans un repère orthogonal, la parabole d'équation $y = x^2$ admet l'axe des ordonnées comme axe de symétrie.

Démonstration Pour n'importe quel réel x , on a $(-x)^2 = x^2$. Les points $M(x; x^2)$ et $M'(-x; x^2)$ appartiennent tous les deux à la courbe et sont symétriques par rapport à l'axe des ordonnées. L'axe des ordonnées est donc un axe de symétrie de cette parabole.

1.3. Équations $x^2 = a$

1.3.1. N'oublions pas les solutions négatives ! Exemple 1 La démarche « naturelle » qui consiste à résoudre l'équation $x^2 = 4$ en $x = 2$ est fautive. En effet, on attend **TOUTES** les solutions et on a oublié -2 , qui vérifie pourtant $(-2)^2 = 4$.

D'où vient cette erreur ? Des applications du théorème de Pythagore ! En effet, souvenons-nous : Si ABC est rectangle en A et que $AB = 3$ et $AC = 4$, alors le théorème de Pythagore s'applique et il vient :

$$\begin{aligned} AB^2 + AC^2 &= BC^2 \\ 4^2 + 3^2 &= BC^2 \\ 25 &= BC^2 \end{aligned}$$

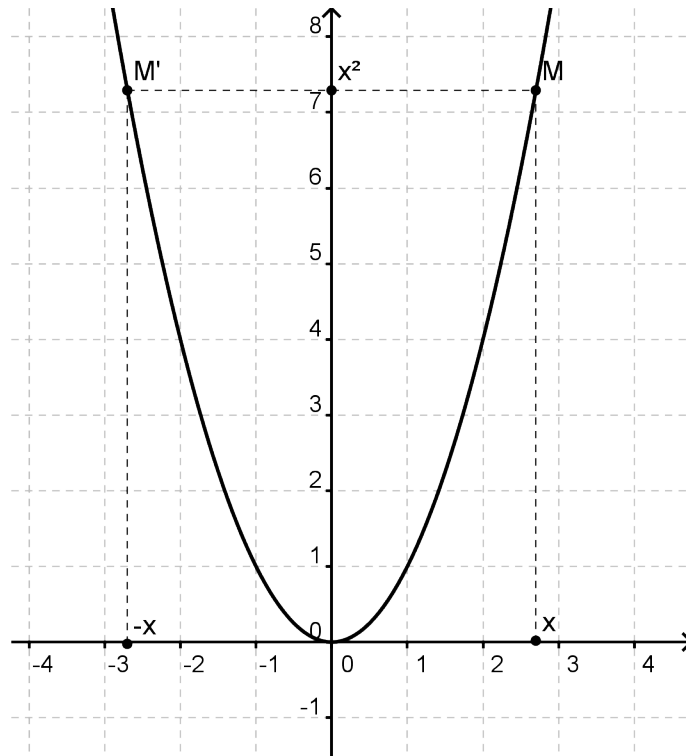


Figure 1: Parabole d'équation $y = x^2$

On en déduit que $BC = 5$, car BC est une distance, donc un **nombre positif**. La solution $BC = -5$ est exclue, car **impossible**. Rien n'indique dans l'équation $x^2 = 4$ que x soit positif... donc rien ne permet d'exclure $x = -2$!

1.3.2. Cas général

Si $a < 0$,
 $x^2 = a$ **n'a pas** de solution.

Démonstration. $x^2 \geq 0$ pour tout réel x . Donc x^2 ne peut jamais être égal à un nombre strictement négatif. \square

Si $a = 0$,
 $x^2 = 0$ a une **unique solution**
 $x = 0$.

Démonstration. $x^2 = 0$ signifie $x \times x = 0$. Un produit est nul si et seulement si l'un de ses facteurs est nul. 0 est donc la seule solution. \square

Si $a > 0$,
 $x^2 = a$ a **deux solutions**
 $x = -\sqrt{a}$ et $x = \sqrt{a}$.

Démonstration. $x^2 = a$ revient à $x^2 - a = 0$. Comme a est positif, il est le carré de \sqrt{a} . L'équation s'écrit $(x + \sqrt{a})(x - \sqrt{a}) = 0$. Soit $x = -\sqrt{a}$ ou $x = +\sqrt{a}$. \square

2. La fonction valeur absolue : $x \mapsto |x|$

2.1 Définition et propriétés

Définition 2

La fonction **valeur absolue** est définie sur \mathbb{R} par :

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Exemple 2

- $|0| = 0$ car $0 \geq 0$
- $|3| = 3$ car $3 \geq 0$
- $|-2| = -(-2) = 2$ car $-2 < 0$
- $|-5| = 5$ car $-5 < 0$

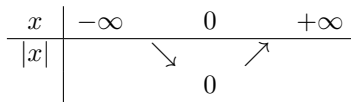
Propriété 3

La valeur absolue est toujours positive. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $|x| \geq 0$.

Autrement dit, la courbe de la valeur absolue est située au dessus de l'axe des abscisses.

Propriété 4

La valeur absolue est décroissante sur $]-\infty; 0]$ et croissante sur $[0; +\infty[$.



2.2 Représentation graphique

La courbe de la valeur absolue est constituée de deux demi-droites sécantes à l'origine.

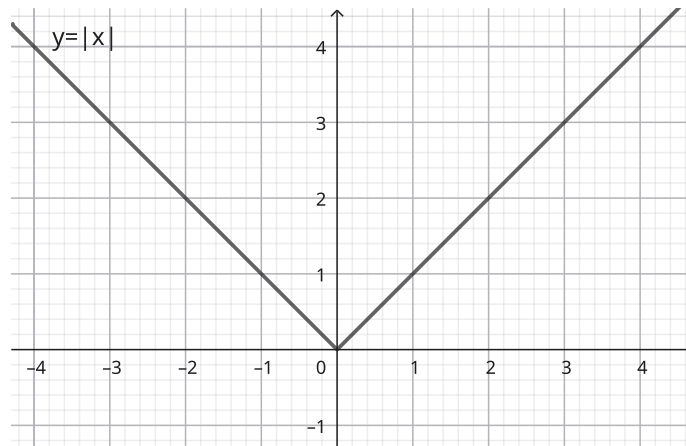


Figure 2: Courbe de la valeur absolue