

# Vecteurs, deuxième partie

## Chapitre 9

---

### Contents

1. Produit d'un vecteur par un nombre réel . . . . .	1
2. Vecteurs colinéaires et application en géométrie . . . . .	2

---

### 1. Produit d'un vecteur par un nombre réel

#### 1.1. Définition

Soit  $\vec{u}$  un vecteur et  $k$  un nombre réel. Si  $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$  dans un repère, le vecteur noté  $k\vec{u}$  est le vecteur de coordonnées :

$$k\vec{u} \begin{pmatrix} kx \\ ky \end{pmatrix}$$

#### 1.2. Exemple

Soit  $\vec{AB} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$  et les points  $C$  et  $D$  tels que  $\vec{AC} = 3\vec{AB}$  et  $\vec{AD} = -2\vec{AB}$ .

- $3\vec{AB} \begin{pmatrix} 3 \times 2 \\ 3 \times 1 \end{pmatrix}$  donc  $\vec{AC} \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \end{pmatrix}$ ,
- $-2\vec{AB} \begin{pmatrix} -2 \times 2 \\ -2 \times 1 \end{pmatrix}$  donc  $\vec{AD} \begin{pmatrix} -4 \\ -2 \end{pmatrix}$ .

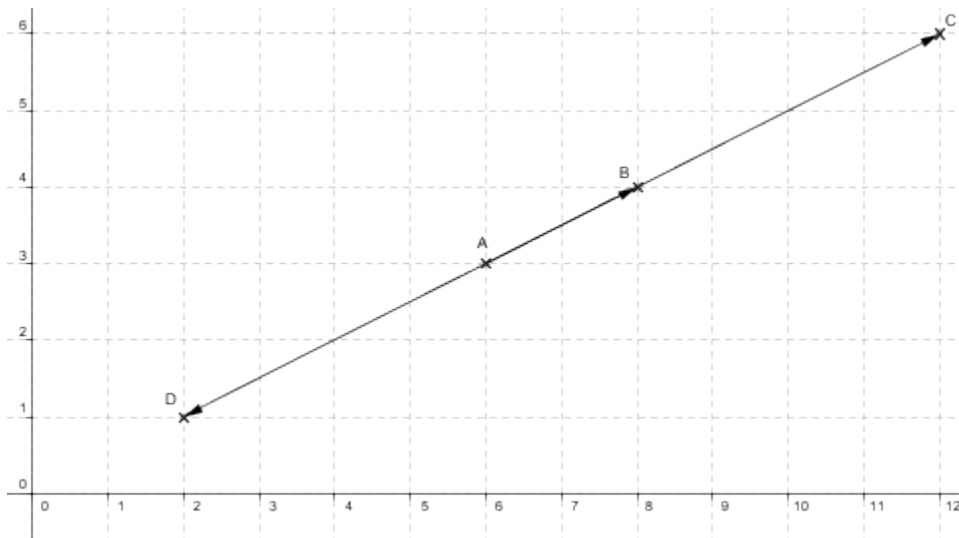


Figure 1: Vecteurs AC et AD

### 1.3. Propriétés

Si  $k$  et  $k'$  sont deux nombres réels et  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  deux vecteurs, alors :

- $(k + k')\vec{u} = k\vec{u} + k'\vec{u}$ ,
- $k(k'\vec{u}) = (kk')\vec{u}$ ,
- $k(\vec{u} + \vec{v}) = k\vec{u} + k\vec{v}$ .

### 1.4. Exemple

- $-\vec{u} - \vec{u} = -2\vec{u}$ ,
- $\vec{AB} = 3\vec{AC}$  revient à  $\vec{AC} = \frac{1}{3}\vec{AB}$ .

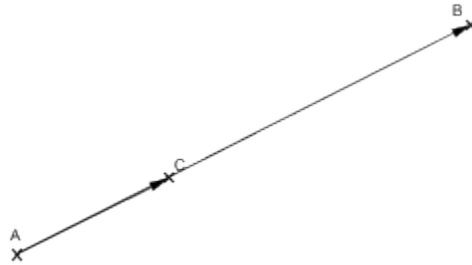


Figure 2: Vecteurs  $\vec{AB}$  et  $\vec{AC}$

De façon générale, à l'aide de ces propriétés, on peut construire géométriquement le vecteur  $k\vec{AB}$ .

### 1.5. Construction

- Si  $\vec{AC} = k\vec{AB}$  avec  $k > 0$  :  $\vec{AC}$  et  $\vec{AB}$  sont de même sens, et  $AC = k \times AB$ ,
- Si  $\vec{AC} = k\vec{AB}$  avec  $k < 0$  :  $\vec{AC}$  et  $\vec{AB}$  sont de sens opposés, et  $AC = -k \times AB$ .

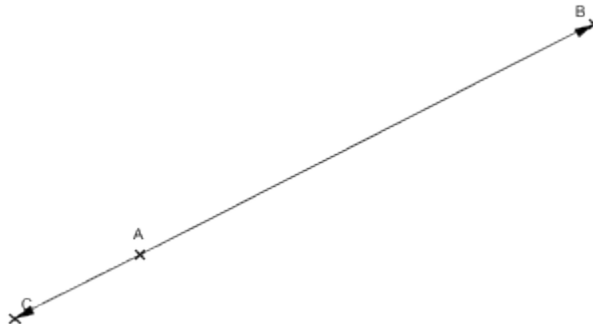


Figure 3: Construction de vecteurs colinéaires

## 2. Vecteurs colinéaires et application en géométrie

### 2.1. Vecteurs colinéaires

Deux vecteurs sont **colinéaires** si l'un est le produit de l'autre par un réel.

### 2.2. Exemple

$\vec{u} \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix}$  et  $\vec{v} \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \end{pmatrix}$  sont colinéaires car  $\vec{v} = -\frac{3}{2}\vec{u}$ . Le vecteur  $\vec{0}$  est colinéaire à tous les autres vecteurs car  $\vec{0} = 0\vec{u}$ .

### 2.3. Théorème et définition

Dans un repère, les vecteurs  $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$  et  $\vec{v} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$  sont colinéaires :

- si et seulement si leurs coordonnées sont proportionnelles,
- si et seulement si  $xy' - x'y = 0$ .

La quantité  $xy' - x'y$  est le **déterminant** du couple de vecteurs  $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$  et  $\vec{v} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ .

## 2.4. Application en géométrie

**2.4.1. Parallélisme** Deux droites  $(AB)$  et  $(CD)$  sont parallèles si et seulement si les vecteurs  $\overrightarrow{AB}$  et  $\overrightarrow{CD}$  sont colinéaires.

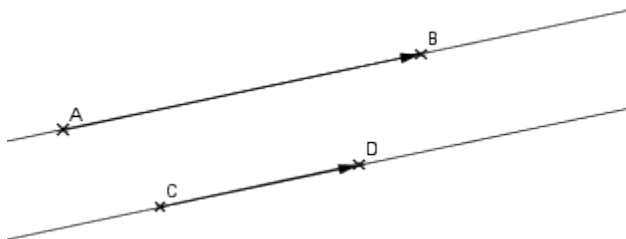


Figure 4: Parallélisme

**2.4.2. Alignement** Trois points  $P$ ,  $Q$  et  $R$  sont alignés si et seulement si les vecteurs  $\overrightarrow{PQ}$  et  $\overrightarrow{PR}$  sont colinéaires.

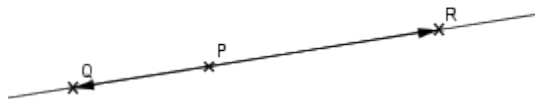


Figure 5: Alignement

## 2.5. Exemple

Soit  $A(2, -1)$  et  $B(-3, 1)$  dans un repère. Un point  $M(x, y)$  appartient à  $(AB)$  si et seulement si  $\overrightarrow{AM} \begin{pmatrix} x-2 \\ y+1 \end{pmatrix}$  et  $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} -5 \\ 2 \end{pmatrix}$  sont colinéaires.

Donc  $M(x, y)$  appartient à  $(AB)$  si et seulement si  $(x-2) \times 2 - (y+1) \times (-5) = 0$ , ce qui devient :

$$y = -\frac{2}{5}x - \frac{1}{5}.$$

On retrouve ainsi une équation de la droite  $(AB)$ .