Calcul littéral

Chapitre 8

Contents

1. Égalité *"pour tout x"* et équation

1.1. Égalité *"pour tout x"*

Un nombre possède plusieurs écritures. Par exemple : $0,5 = \frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{50}{100}$. Ce sont différentes écritures d'un même nombre.

De même, plusieurs expressions algébriques peuvent correspondre à la même fonction.

- Quelle que soit la valeur par laquelle on remplace x dans les expressions $(x-3)(x+1)-5$, x^2-2x-8, $(x-4)(x+2)$, on obtient le même résultat.
- On écrit : **pour tout x réel**, $(x-3)(x+1)-5 = x^2-2x-8 = (x-4)(x+2)$.
- Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (x-3)(x+1)-5$.

  On a aussi $f(x) = x^2-2x-8$ et $f(x) = (x-4)(x+2)$ **pour tout réel** x.
- Pour calculer des images ou des antécédents par f ou étudier des propriétés de f, on peut utiliser l'une ou l'autre de ces expressions, **la mieux adaptée**.

1.2. Exemple

- On calcule facilement $f(0)$ avec x^2-2x-8 :

  $f(0) = 0-0-8 = -8$.

1.3. Équation

Les expressions $2x-1$ et x^2-4 ne sont pas égales pour toutes les valeurs de x.

Par exemple, pour $x=0$, $2x-1$ prend la valeur -1 tandis que x^2-4 prend la valeur -4.

En revanche, pour $x=3$, on a $2x-1=5$ et $x^2-4=5$.

- Quand x prend la valeur 3, on a bien l'égalité $2x-1 = x^2-4$.

  On dit que 3 est **une solution de l'équation** $2x-1=x^2-4$.
- **Résoudre une équation**, c'est chercher **toutes** les solutions de cette équation.

2. Développer, factoriser

Développer une expression, c'est l'écrire sous la forme d'une somme.

Factoriser une expression, c'est l'écrire sous la forme d'un produit.

2.1. Distributivité

Pour tous réels k, a, b, c, d :

- **Simple distributivité** :
$$k \times (a+b) = k \times a + k \times b$$
- **Double distributivité** :
$$(a+b) \times (c+d) = a \times c + a \times d + b \times c + b \times d$$

2.2. Identités remarquables

$$\begin{array}{rcl}(a+b)^2 & = & a^2 + 2ab + b^2 \\ (a-b)^2 & = & a^2 - 2ab + b^2 \\ (a+b)(a-b) & = & a^2 - b^2\end{array}$$

Attention aux confusions :

$$3x^2 \neq (3x)^2$$

$$(3x)^2 = 3^2 \times x^2 \neq (3+x)^2 = 9 + 6x + x^2$$

D'ailleurs, $(3+x)^2 \neq 9 + x^2$!

2.3. Application : développer puis choisir la bonne forme

Énoncé $AB = 8$ et M appartient à $[AB]$. $AMEF$ et $MBGH$ sont des carrés. On pose $x = AM$ avec $x \in [0; 8]$.

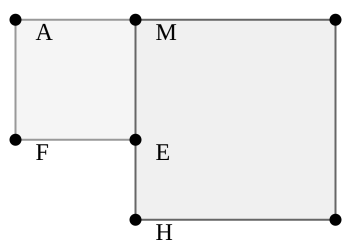

Figure 1: carrés AMEF et MBGH

1. Vérifier que l'aire totale est $A(x) = x^2 + (8-x)^2$.
2. Démontrer que, pour tout x de $[0; 8]$, $A(x) = 2x^2 - 16x + 64$ puis que $A(x) = 32 + 2(x-4)^2$.
3. Calculer $A(4)$ puis montrer que $A(x) \geq A(4)$ pour tout x de $[0; 8]$. Interpréter ce résultat en terme d'aire.

Solution

1. L'aire du carré $AMEF$ est x^2. La longueur MB vaut $AB - AM = 8 - x$, donc l'aire de $MBGH$ est $(8-x)^2$. Il vient $A(x) = x^2 + (8-x)^2$.
2. Développons l'expression $A(x)$. On utilise la seconde identité remarquable et il vient, pour tout x de $[0; 8]$:
$$\begin{aligned} A(x) &= x^2 + (8-x)^2 \\ &= x^2 + 8^2 - 2 \times 8 \times x + x^2 \\ &= 2x^2 - 16x + 64. \end{aligned}$$
De même, pour tout x de $[0; 8]$,
$$\begin{aligned} 32 + 2(x-4)^2 &= 32 + 2(x^2 - 8x + 16) \\ &= 2x^2 - 16x + 64. \end{aligned}$$
On retrouve la même expression, donc pour tout x de $[0; 8]$, $A(x) = 32 + 2(x-4)^2$.
3. Utilisons la dernière expression de $A(x)$. $A(4) = 32 + (4-4)^2 = 32$. Un carré est toujours positif, donc $2(x-4)^2$ l'est. On en déduit que $32 + 2(x-4)^2 \geq 32$, donc que $A(x) \geq A(4)$ pour tout x de $[0; 8]$. L'aire est minimale quand $x = 4$, donc quand M est le milieu de $[AB]$.

3. Factoriser en pratique

3.1. Méthode

Pour factoriser une expression *" à la main "*, on analyse sa structure et on se pose un certain nombre de questions.

- **Q1 :** Est-ce une somme (ou une différence) ? De combien de termes ?
- **Q2 :** Chaque terme est-il un produit ? Ou peut-il être écrit comme un produit ? Quels sont les facteurs de chaque terme ? Y a-t-il un facteur commun ?
- **Q3 :** Sinon, peut-on utiliser une identité remarquable ?
- **Q4 :** Sinon, peut-on factoriser une partie de l'expression pour faire apparaître un facteur commun ou une identité remarquable ?
- **Q5 :** Sinon, on développe en espérant pouvoir factoriser ensuite.

3.2. Exemples

3.2.1. Exemple 1

Factoriser $f(x) = (x+1)(2x-3) + 4(x+1)$.

- **Q1 :** Cette expression est la somme de deux termes.
- **Q2 :** Chaque terme est un produit de deux facteurs.
- **Q2 :** $(x+1)$ est un facteur commun aux deux termes.
- **Q2 :** On factorise : $f(x) = (x+1) \times [(2x-3)+4]$.
- **Q2 :** On réduit le second facteur : $f(x) = (x+1)(2x+1)$, pour tout x.

3.2.2. Exemple 2

Factoriser $g(x) = 16x^2 - (x+1)^2$.

- **Q1 :** C'est la différence de deux termes.
- **Q2 :** Les termes sont des produits sans facteur commun.
- **Q3 :** On a une différence de deux carrés $a^2 - b^2$: $g(x) = (4x)^2 - (x+1)^2$. On utilise $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$. On factorise $g(x) = [4x - (x+1)][4x + (x+1)]$ et on réduit chaque facteur. Pour tout x,

$$g(x) = (3x-1)(5x+1).$$

3.2.3. Exemple 3

Factoriser $h(x) = x^2 - 9 + 3(x-3)$.

- **Q1, Q2, Q3 :** $h(x)$ est une somme de trois termes, on ne voit ni facteur commun, ni identité remarquable.
- **Q4 :** On peut factoriser $x^2 - 9 = (x-3)(x+3)$. Cela fait apparaître $x-3$ comme facteur commun : $h(x) = (x-3)(x+3) + 3(x-3)$. On factorise : $h(x) = (x-3) \times [(x+3)+3]$. On réduit : $h(x) = (x-3)(x+6)$, pour tout x.

3.3. Exercice

Factoriser :

- $f(x) = 4x^3 - x$,
- $g(x) = (x+1)(x-4) + 3x + 3$,
- $h(x) = 2x^2 - 20x + 50$,
- $k(x) = 9x^2 - 12x + 4$.

3.4. Remarque

- Certaines expressions **ne peuvent pas se factoriser**. C'est le cas de $x^2 + 1$.

  Il **n'existe pas** de meilleure *" factorisation "* de cette expression avec des coefficients réels.

- Parfois, une meilleure factorisation **existe**, mais **les méthodes vues précédemment ne permettent pas de l'obtenir**.

  Par exemple, si on part de $f(x) = x^2 - 8x + 41$, aucune des méthodes précédentes ne permet d'aboutir...

  Mais, si on part d'une autre écriture de $f(x) = (x-4)^2 - 25$, on peut factoriser en utilisant $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$ et écrire : $f(x) = (x-4-5)(x-4+5)$, qui devient $f(x) = (x-9)(x+1)$.

- Une méthode générale pour factoriser les expressions du second degré sera présentée en première.

  Il est toujours possible d'utiliser un **logiciel de calcul formel** pour obtenir les factorisations... quand elles existent !

4. Résoudre algébriquement une équation

4.1. Équations équivalentes

Deux équations sont dites **équivalentes** quand elles ont les mêmes solutions.

Résoudre :

$$\begin{aligned} & 2(x+3)-4 &= 5x-1 \\ \Leftrightarrow & \quad 2x+2 &= 5x-1 \\ \Leftrightarrow & \quad 2x-5x &= -1-2 \\ \Leftrightarrow & \quad -3x &= -3 \\ \Leftrightarrow & \quad x &= 1. \end{aligned}$$

Cette équation a pour unique solution $x=1$.

4.2. Propriété

Pour transformer une équation en une équation équivalente, on peut utiliser les propriétés suivantes : - Développer, factoriser, réduire certains termes, - Ajouter ou soustraire un même nombre à chaque membre de l'équation, - Multiplier ou diviser chaque membre par un même nombre **non nul**.

4.3. Degré de l'équation

Premier degré : Les équations du premier degré sont celles qui peuvent s'écrire sous la forme $ax+b=cx+d$ où a, b, c, d sont des réels. L'exemple est une équation du premier degré. Elles se résolvent directement en appliquant les transformations ci-dessus.

Autres équations : - Si après développement l'équation est équivalente à une équation du premier degré, on applique la méthode précédente. - Sinon, on transforme l'équation pour obtenir un second membre nul et on factorise pour pouvoir appliquer l'un des résultats suivants :

4.4. Propriétés

- **Théorème du produit nul** : Un **produit** de facteurs est nul si l'un de ses facteurs est nul.

$$P \times Q = 0 \quad \text{si et seulement si} \quad P=0 \text{ ou } Q=0.$$

- **Théorème du quotient nul** : Un **quotient** de facteurs est nul si le numérateur est nul et le **dénominateur est non nul**.

$$\frac{P}{Q} = 0 \quad \text{si et seulement si} \quad P=0 \text{ et } Q \neq 0.$$

4.5. Exercice

Résoudre graphiquement puis par le calcul :

1. $(E_1) \quad 3x^2+3x-2=-x-2,$
2. $(E_2) \quad (x-1)^2+3x=x^2-1.$