

Multiples et diviseurs

Chapitre 4

Contents

1. Multiples et diviseurs dans \mathbb{Z}	1
2. Nombres pairs, nombres impairs	2

1. Multiples et diviseurs dans \mathbb{Z}

1.1. Rappels : Ensembles \mathbb{N} et \mathbb{Z}

Définition 1

- L'ensemble des entiers **naturels** $\{0, 1, 2, \dots\}$ est noté \mathbb{N} .
- L'ensemble des entiers **relatifs** $\{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$ est noté \mathbb{Z} .

Propriété 1

La somme, la différence et le produit de deux entiers relatifs sont des entiers relatifs.

Propriété 2

La **division euclidienne** de deux entiers relatifs donne des entiers relatifs : Pour tout entier a et b , avec b non nul, il existe un unique couple d'entiers relatifs q et r tels que :

$$a = b \times q + r \quad \text{avec} \quad 0 \leq r < |b|$$

q est appelé **quotient** et r **reste** de la division.

Exemple 1

- $37 = 5 \times 7 + 2$. La division euclidienne de 37 par 5 a pour quotient 7 et reste 2. On a bien $0 \leq 2 < 5$.
- $37 = 5 \times 4 + 17$. 4 et 17 ne conviennent pas car 17 est **plus grand** que 5.

1.2. Multiples et diviseurs dans \mathbb{Z}

Définition 2

Soient deux entiers relatifs n et p . S'il existe un entier q tel que $n = p \times q$, c'est-à-dire si le reste de la division euclidienne de n par p est nul, on dit que : $- p$ est un **diviseur** de n ou que n est **divisible** par p . $- n$ est un **multiple** de p .

Exemple 2

$12 = 4 \times 3$: 12 est un multiple de 4, 4 divise 12.

Remarque 1

- Tout nombre entier relatif non nul a au moins deux diviseurs : 1 et lui-même.
- Tout nombre entier relatif admet une infinité de multiples. Les multiples de n sont les nombres qui s'écrivent $k \times n$ où $k \in \mathbb{Z}$.

Propriété 3

On considère trois entiers relatifs a , n et p . Si les entiers n et p sont des multiples de a , alors la somme $n + p$, la différence $n - p$ et le produit $n \times p$ le sont aussi.

Exemple 3

36 et 90 sont multiples de 9, donc $126 = 90 + 36$ l'est aussi. En effet, $126 = 9 \times 14$. Remarquons aussi qu'on a $36 = 9 \times 4$, $90 = 9 \times 10$ et $126 = 9 \times (4 + 10)$.

Preuve : Pour la somme

n est multiple de a , donc il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $n = a \times k$. p est multiple de a , donc il existe $l \in \mathbb{Z}$ tel que $p = a \times l$. On en déduit que :

$$n + p = a \times k + a \times l = a \times (k + l).$$

Autrement dit, la somme $n + p$ est multiple de a .

2. Nombres pairs, nombres impairs

2.1. Définitions

Définition 3 et Propriété

On considère un entier naturel n . - Si n est divisible par 2, on dit que n est **pair**. Il existe alors un entier p tel que $n = 2 \times p$. - Sinon, on dit que n est **impair**. Il existe alors un entier p tel que $n = 2 \times p + 1$.

Exemple 4

38 est un nombre pair car $38 = 2 \times 19$. 17 est un nombre impair et $17 = 2 \times 8 + 1$.

Preuve

On considère un entier naturel n . On effectue la division euclidienne de n par 2. Il existe donc un entier p (quotient) et un entier r (reste) tels que :

$$n = 2 \times p + r \quad \text{avec} \quad 0 \leq r < 2.$$

r est un entier naturel qui vérifie $0 \leq r < 2$, donc $r = 0$ ou $r = 1$. - Si $r = 0$, alors n est pair et $n = 2 \times p$. - Sinon, n est impair et $n = 2 \times p + 1$.

Propriété 4 : Critère de parité

Un entier naturel n est pair si son chiffre des unités est pair, c'est-à-dire égal à 0, 2, 4, 6 ou 8.

2.2. Parité et somme d'entiers

Propriété 5

- La somme de deux entiers pairs est un entier pair.
- La somme de deux entiers impairs est un entier pair.
- La somme d'un entier pair et d'un entier impair est un entier impair.

Preuve

- **Pour deux entiers pairs :**

Si n et m sont pairs, il existe p et q tels que $n = 2 \times p$ et $m = 2 \times q$. On a alors :

$$n + m = 2 \times p + 2 \times q = 2 \times (p + q).$$

Donc $n + m$ est pair.

- **Pour deux entiers impairs :**

Si n et m sont impairs, il existe p et q tels que $n = 2 \times p + 1$ et $m = 2 \times q + 1$. On a alors :

$$n + m = 2 \times p + 1 + 2 \times q + 1 = 2 \times (p + q) + 2 = 2 \times (p + q + 1).$$

Donc $n + m$ est pair.

2.3. Parité d'un carré

Propriété 6

On considère un entier naturel n . - Si n est pair, alors son carré n^2 est pair. - Si n est impair, alors son carré n^2 est impair.

Exemple 5

- 12 est pair et $12^2 = 144$ aussi.
- 9 est impair et $9^2 = 81$ aussi.

Preuve

On considère un entier relatif n .

- Si n est pair, alors on peut écrire $n = 2 \times k$ avec $k \in \mathbb{Z}$. Donc :

$$n^2 = (2 \times k)^2 = (2k) \times (2k) = 2 \times (2k^2).$$

Donc n^2 est pair.

- Si n est impair, alors on peut écrire $n = 2 \times k + 1$ avec $k \in \mathbb{Z}$. Donc :

$$n^2 = (2k + 1)^2 = (2k + 1) \times (2k + 1) = (2k)^2 + 2k + 2k + 1 = 2 \times (2k^2 + k + k) + 1.$$

Donc n^2 est impair. On peut aussi employer l'identité remarquable $(2k + 1)^2 = 4k^2 + 4k + 1$ et obtenir le même résultat.

Propriété 7

La réciproque de ce théorème est vraie : - Si le carré n^2 est pair, alors n est pair. - Si le carré n^2 est impair, alors n est impair.