Vecteurs, première partie

Chapitre 3

Contents

1. Repères et coordonnées

1.1. Repères du plan

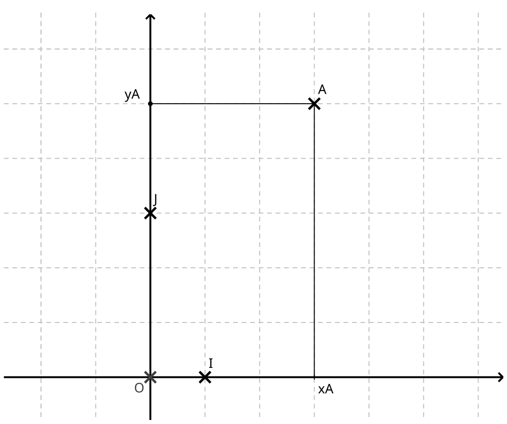
Dans le plan, trois points non alignés O, I et J déterminent un repère (O, I, J). Dans ce repère, tout point M du plan est repéré par son couple de coordonnées $(x; y)$.

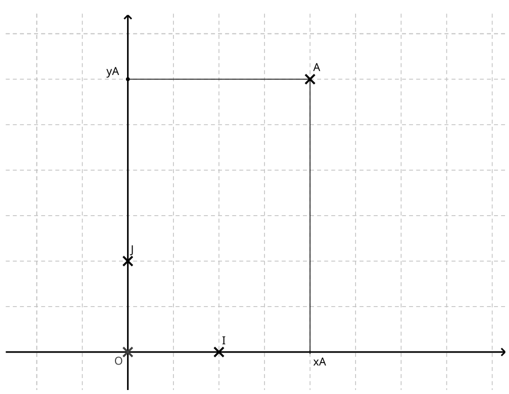
1.2. Trois types de repères

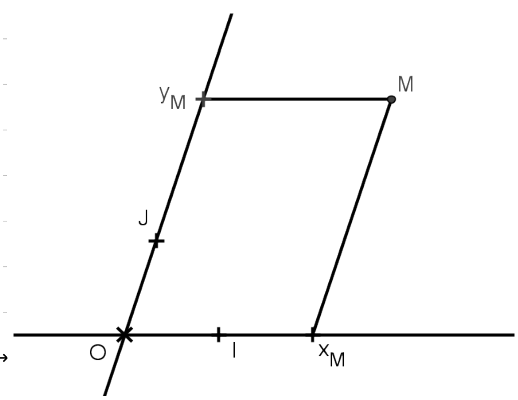
1.2.1. Orthogonal **Définition 1** Si (OI) est perpendiculaire à (OJ), on dit que le repère (O, I, J) est **orthogonal**.

1.2.2. Orthonormé **Définition 2** Si (OI) est perpendiculaire à (OJ) et que $OI = OJ$, on dit que le repère (O, I, J) est **orthonormé**.

1.2.3. Quelconque **Définition 3** Sinon, le repère est dit **quelconque**.







1.2.4. Propriétés communes à tous les repères

Propriété 1 Dans n'importe quel type de repère (O, I, J), on a :

- Les coordonnées : $O(0; 0)$, $I(1; 0)$ et $J(0; 1)$.
- Deux points qui ont les mêmes coordonnées sont confondus.

1.3. Milieu d'un segment

Théorème 1 Dans le repère (O, I, J), soit $A(x_A, y_A)$ et $B(x_B, y_B)$. Le milieu K du segment $[AB]$ a pour coordonnées :

$$K\left(\frac{x_A + x_B}{2}; \frac{y_A + y_B}{2}\right).$$

Cette formule est valable dans **tout type de repère**.

Exemple 1 Soit $A(-2; 3)$ et $B(4; 2)$, alors :

$$x_K = \frac{-2+4}{2} = 1 \quad \text{et} \quad y_K = \frac{3+2}{2} = \frac{5}{2}.$$

Remarque 1 Le milieu K est le *« point moyen »* de A et B. Son abscisse est la **moyenne des abscisses**, son ordonnée est la **moyenne des ordonnées**.

1.4. Distance en repère orthonormé

Théorème 2 Dans un repère **orthonormé**, soit $A(x_A, y_A)$ et $B(x_B, y_B)$. La **distance** AB est donnée par :

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}.$$

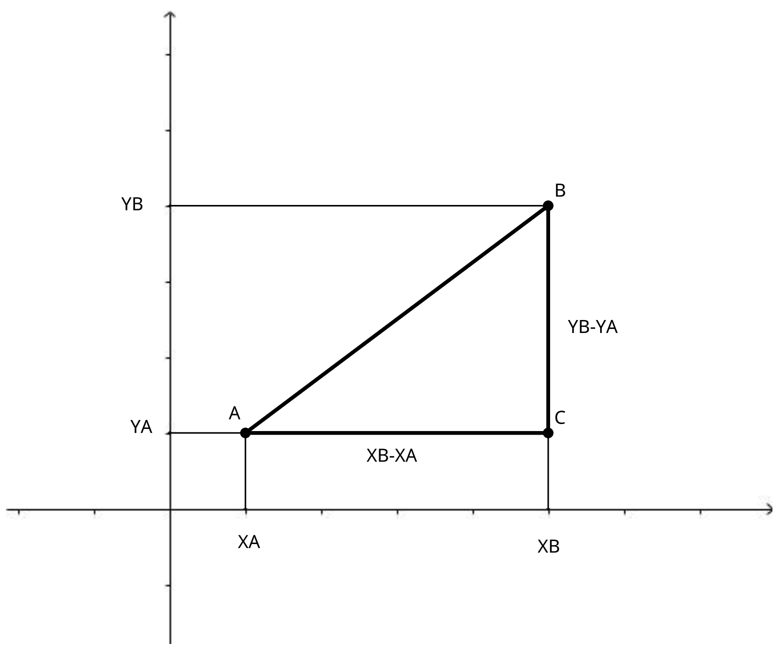


Figure 1: Distance en repère orthonormé

Exercice 1 Soit $A(1; -2)$ et $B(4; 2)$. Démontrer que B appartient au cercle de centre A et de rayon 5.

Solution B appartient au cercle de centre A et de rayon 5 si $AB = 5$. D'après la propriété :

$$AB = \sqrt{(4-1)^2 + (2+2)^2} = \sqrt{9+16} = 5.$$

Ainsi, B appartient au cercle.

Preuve : Distance en repère orthonormé La preuve s'appuie sur le théorème de **Pythagore**.

Considérons le point $C(x_B; y_A)$. On suppose $x_A \neq x_B$ et $y_A \neq y_B$. Les axes du repère sont perpendiculaires, donc le triangle ABC est **rectangle** en C. D'après le théorème de Pythagore :

$$AB^2 = AC^2 + BC^2.$$

Or $AC = x_B - x_A$ ou $x_A - x_B$, dans tous les cas $AC^2 = (x_A - x_B)^2$. De même, $BC^2 = (y_B - y_A)^2$. On remplace :

$$AB^2 = (x_A - x_B)^2 + (y_B - y_A)^2.$$

Donc :

$$AB = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_B - y_A)^2}.$$

On vérifie que la formule reste vraie si $x_A = x_B$ ou si $y_A = y_B$.

2. Translation et vecteurs

2.1. Vecteurs du plan

Définition 4 Soient A et B deux points du plan. À tout point C du plan, on associe l'unique point D tel que $[AD]$ et $[BC]$ aient le même milieu. On dit que D est l'image de C par la translation qui envoie A sur B.

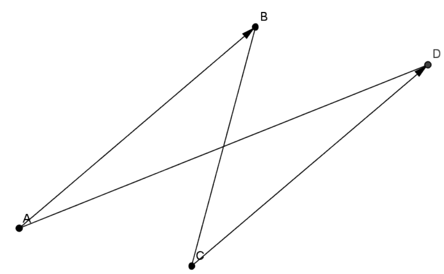


Figure 2: Translation

Si C n'est pas aligné avec A et B, D est l'unique point tel que $ABDC$ soit un parallélogramme.

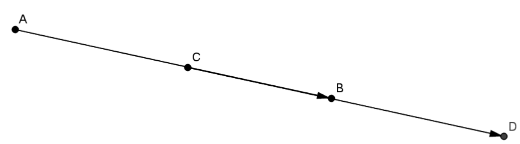


Figure 3: Parallélogramme aplati

Si C est aligné avec A et B, le parallélogramme $ABDC$ est aplati.

Remarque 2 Attention à l'ordre : le parallélogramme est $AB\underline{DC} \neq AB\underline{CD}$!

La translation qui envoie A sur B est aussi appelée la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$. Si $A \neq B$, on représente le vecteur $\overrightarrow{AB}$ par une flèche d'origine A et d'extrémité B.

Visuellement, ce vecteur donne l'idée d'un déplacement :

- Il en indique la **direction**, celle de la droite (AB),
- le **sens**, de A vers B,
- et la **longueur** AB.

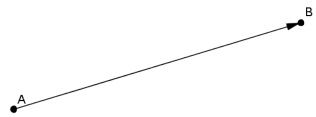


Figure 4: Vecteur $\overrightarrow{AB}$

2.2. Égalité de deux vecteurs

Propriété 2 Dire que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ signifie que D est l'image de C par la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$. Autrement dit :

- $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ si et seulement si $[AD]$ et $[BC]$ ont le même milieu.
- $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ si et seulement si $ABDC$ est un parallélogramme.

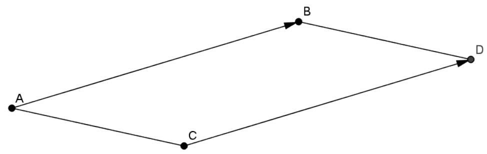


Figure 5: Égalité de deux vecteurs

Remarque 3

- Visuellement, $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont égaux s'ils donnent l'idée du même déplacement. Les translations de vecteur $\overrightarrow{AB}$ et de vecteur $\overrightarrow{CD}$ sont identiques.
- Si $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC}$, alors $B = C$.

Propriété 3 Le point I est le milieu de $[AB]$ si et seulement si $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{IB}$.

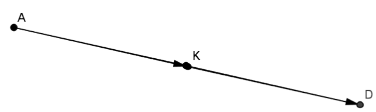


Figure 6: I milieu de $[AB]$

2.3. Représentant d'un vecteur, vecteur nul, opposé d'un vecteur

Définition 5 : Représentant Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ peut être représenté à partir de n'importe quel point. Partant du point C, on aura $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$. On peut le représenter avec une seule lettre : $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{EF} = \cdots$. On dit que $\overrightarrow{AB}$ est le représentant de $\overrightarrow{u}$ d'origine A, $\overrightarrow{EF}$ celui d'origine E, etc.

Définition 6 : Vecteur nul Si $A = B$, le déplacement de A vers B est considéré comme nul. On note $\overrightarrow{AA} = \overrightarrow{BB} = \overrightarrow{0} = \cdots$.

Définition 7 : Opposé d'un vecteur Le vecteur $\overrightarrow{BA}$ et le vecteur $\overrightarrow{AB}$ sont opposés. On note $\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB}$. $\overrightarrow{BA}$ et $\overrightarrow{AB}$ ont la même direction et la même longueur, mais des sens opposés. La translation de vecteur $\overrightarrow{BA}$ est la *translation réciproque* à celle de vecteur $\overrightarrow{AB}$.

2.4. Norme d'un vecteur

Définition 8 La norme du vecteur $\overrightarrow{AB}$ est la longueur AB. On la note $\left\|\overrightarrow{AB}\right\|$.

Propriété 4 Deux vecteurs sont égaux s'ils ont : même direction, même sens et même norme. Ainsi, $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ si et seulement si :

- $(AB) \parallel (CD)$,
- $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ ont le même sens,
- $AB = CD$.

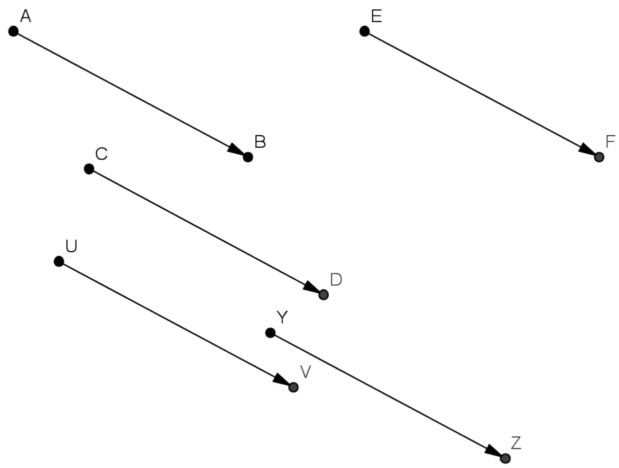


Figure 7: Représentant d'un vecteurs

3. Coordonnées d'un vecteur, base d'un repère

3.1. Coordonnées d'un vecteur

Définition 9 Dans un repère, les coordonnées d'un vecteur $\overrightarrow{u}$ sont les coordonnées du point M tel que $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{u}$. Si $M(x, y)$, on note $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ les coordonnées de $\overrightarrow{u}$.

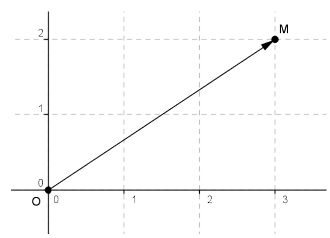


Figure 8: Coordonnées d'un vecteurs

Propriété 5 Dans un repère, si $A(x_A, y_A)$ et $B(x_B, y_B)$, le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées :

$$\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}.$$

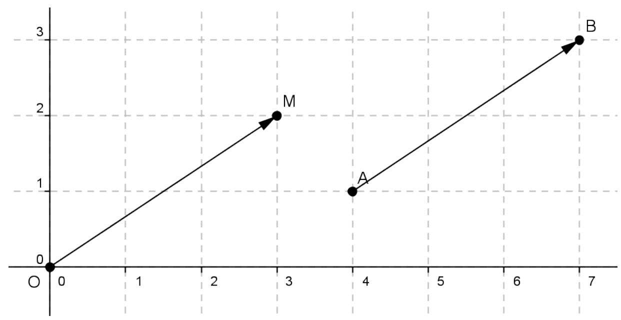


Figure 9: Deux vecteurs égaux

Exemple 2 - Si $A(1; 3)$ et $B(4; -1)$, on obtient :

$$\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 4 - 1 \\ -1 - 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix}.$$

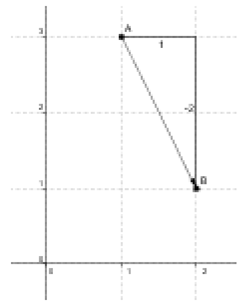


Figure 10: Coordonnées dans une base

- Dans le repère (O, I, J), on a :

$$\overrightarrow{OI}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{OJ}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}.$$

- Le vecteur $\overrightarrow{0}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$.

Preuve Les coordonnées de $\overrightarrow{AB}$ sont les coordonnées (x, y) du point M tel que $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{AB}$. Alors $[OB]$ et $[AM]$ ont le même milieu. Les coordonnées du milieu de $[OB]$ sont $\left(\frac{x_B}{2}, \frac{y_B}{2}\right)$ et celles du milieu de $[AM]$ sont $\left(\frac{x_A+x}{2}, \frac{y_A+y}{2}\right)$. Donc :

$$\frac{x_A + x}{2} = \frac{x_B}{2} \quad \text{et} \quad \frac{y_A + y}{2} = \frac{y_B}{2}.$$

D'où :

$$x = x_B - x_A \quad \text{et} \quad y = y_B - y_A.$$

Propriété 6 Deux vecteurs du plan sont égaux si, et seulement s'ils ont les mêmes coordonnées dans un repère du plan.

3.2. Base d'un repère

Définition 10 Deux vecteurs $\overrightarrow{i}$ et $\overrightarrow{j}$ forment une **base** s'ils ne sont pas portés par des droites parallèles.

Remarque 4 On dira plus tard que deux vecteurs *portés par des droites parallèles* sont *colinéaires*.

Définition 11 : Base d'un repère La **base** du repère (O, I, J) est le couple $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$, où $\overrightarrow{i} = \overrightarrow{OI}$ et $\overrightarrow{j} = \overrightarrow{OJ}$.

Remarque 5

Comme pour les repères, on distingue trois types de bases : - Base **orthogonale** quand les vecteurs $\overrightarrow{i}$ et $\overrightarrow{j}$ sont portés par des droites perpendiculaires, - Base **orthonormée** quand la base est orthogonale et que $\overrightarrow{i}$ et $\overrightarrow{j}$ ont la même norme, - Base **quelconque** dans tous les autres cas.

Remarque 6 On note généralement le repère $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$.

Propriété 7 : Coordonnée d'un point dans une base repérée Si les coordonnées du point M sont (x, y), on a :

$$\overrightarrow{OM} = x\overrightarrow{i} + y\overrightarrow{j}.$$

4. Somme de deux vecteurs

4.1. Relation de Chasles

Définition 12 En enchaînant la translation de vecteur $\overrightarrow{u}$ et celle du vecteur $\overrightarrow{v}$, on obtient une nouvelle translation. Le vecteur qui lui est associé est appelé la **somme des vecteurs** $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ et est noté $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}$. L'ordre n'a pas d'importance, autrement dit :

$$\overrightarrow{v} + \overrightarrow{u} = \overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}.$$

On peut enchaîner trois vecteurs, et le vecteur qu'on obtient est $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} + \overrightarrow{w}$.

Propriété 8 : Relation de Chasles Pour tous points du plan A, B et C :

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}.$$

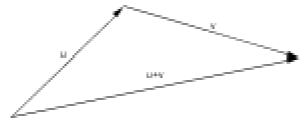


Figure 11: Relation de Chasles

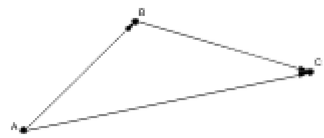


Figure 12: Relation de Chasles

4.2. Coordonnées de la somme de deux vecteurs

Propriété 9 Dans un repère du plan, si $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$, alors :

$$\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}\begin{pmatrix} x + x' \\ y + y' \end{pmatrix}.$$

4.3. Règle du parallélogramme

Propriété 10 Si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ont la même origine, alors :

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD},$$

où D est l'unique point tel que $ABDC$ est un parallélogramme.

4.4. Différence de deux vecteurs

Définition 13 : Opposé d'un vecteur

- Le vecteur $-\overrightarrow{v}$ vérifie $\overrightarrow{v} + (-\overrightarrow{v}) = \overrightarrow{0}$.
- La différence $\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v}$ est définie par $\overrightarrow{u} + (-\overrightarrow{v})$.

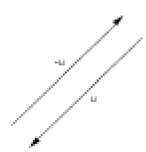


Figure 13: Opposé d'un vecteur

Définition 14 : Différence de deux vecteurs Dans un repère du plan, si $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$, alors :

$$\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v}\begin{pmatrix} x - x' \\ y - y' \end{pmatrix}.$$