Les nombres réels

Chapitre 1

Contents

1. Les ensembles de nombres

Propriété 1 *(Admise)*

On peut associer à tout point M d'une droite graduée $\mathcal{D}$ un nombre appelé *abscisse* de M.

Définition 1

L'ensemble des abscisses des points de $\mathcal{D}$ est appelé *ensemble des réels.* Il est noté $\mathbb{R}$.

Exemple 1

L'abscisse du point O est 0, celle de I est 1, celle de A est $-\frac{7}{3}$ et celle de P est π.

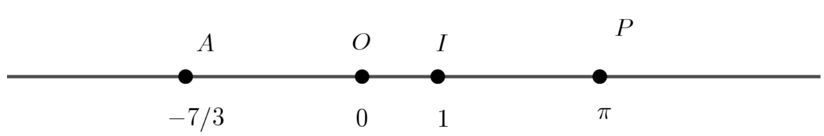


Figure 1: axe réel

Définition 2

Durant les années antérieures, on a construit différents ensembles de nombres *imbriqués.* $\mathbb{R}$ les contient tous.

Ensemble de nombres	**Notation**	**Éléments et exemples**
Entiers naturels	$\mathbb{N}$	$0 \;;\; 1 \;;\; 3$ etc.
Entiers relatifs	$\mathbb{Z}$	$-10 \;;\; -5 \;;\; -1 \;;\; 0 \;;\; 1 \;;\; 2 \;;\; 3$
Décimaux	$\mathbb{D}$	$-1/2 \;;\; 0.5 \;;\; 12,345 \;;\; 1$
Rationnels	$\mathbb{Q}$	$\dfrac{1}{3} \;;\; -\dfrac{2}{7}$
Réels	$\mathbb{R}$	$\pi \;;\; \sqrt{2} \;;\; \frac{1}{3}$

Propriété 2

Les ensembles de nombres sont contenus les uns dans les autres :

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$$

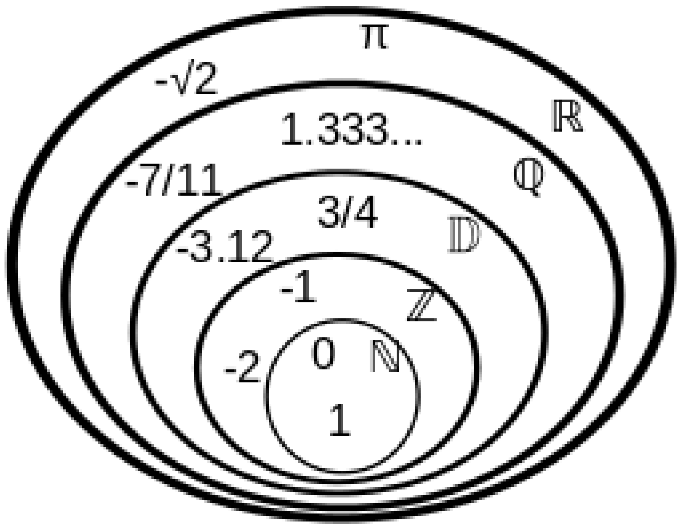


Figure 2: ensembles imbriqués

Propriété 3

Les nombres rationnels de l'ensemble $\mathbb{Q}$ peuvent s'écrire $\frac{p}{q}$ avec $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{Z}, q \neq 0$. Ils admettent une *écriture décimale* qui se termine ou qui se répète.

Exemple 2 ***(Nombres rationnels)***

$\frac{1}{3} = 0,3333\underline{3}$ $\quad$ $\frac{1}{10} = 0,1$ $\quad$ $\frac{324}{11} = 29,45\underline{45}$ On souligne les chiffres qui se répètent.

Remarque 1

Les décimaux, dont l'ensemble est noté $\mathbb{D}$, sont les nombres qui admettent une écriture décimale *qui se termine* comme $\frac{246}{128} = 1,921875$.

Méthode 1

Démontrer qu'un nombre n'est pas un décimal.

Méthode 2

Démontrer qu'un nombre n'est pas un rationnel.

Remarque 2

L'un des objectifs de cette année est de répondre à la question générale : ce nombre x est-il dans cet ensemble E ?

2. Intervalles

Définition 3

Soient a et b deux réels. L'ensemble des réels x tels que $a \leq x \leq b$ est noté $[a\ ;\ b]$. C'est l'intervalle des nombres compris entre a et b, bornes incluses.

Il existe plusieurs sortes d'intervalles, selon leurs bornes :

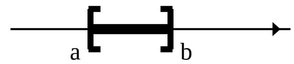
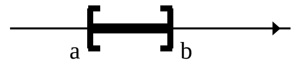
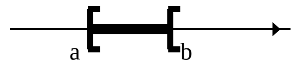
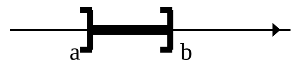
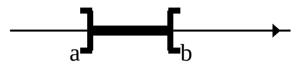
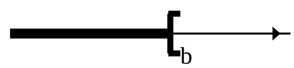
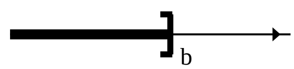


Figure 3: Intervalle

Intervalle	Inéquation	Représentation graphique
$[a;b]$	$a \leq x \leq b$	
$[a;b[$	$a \leq x < b$	
$]a;b]$	$a < x \leq b$	
$]a;b[$	$a < x < b$	
$[a;+\infty[$	$a \leq x$	
$]a;+\infty[$	$x > a$	
$]-\infty;b[$	$x < b$	
$]-\infty;b]$	$x \leq b$	

Le symbole ∞ se lit *« infini »*. Ce n'est pas un nombre réel. Du côté de l'infini, le crochet est toujours tourné vers l'extérieur : $]-\infty;3]$ ou $]4;+\infty[$.

Méthode 3

Représenter un intervalle sur une droite graduée

Définition 4

Soient I et J deux intervalles. 1. L'ensemble des réels qui appartiennent à la fois à I et à J est appelé **l'intersection** de I et J. Cet ensemble est noté $I \cap J$. 2. L'ensemble des réels qui appartiennent à I ou à J est appelé **la réunion** de I et J. Cet ensemble est noté $I \cup J$.

Exemple 3 ***(Intersections et réunions d'intervalles)***

1. $[4;5] \cap [2;3] = \emptyset$
2. $[2;5] \cap [2;3] = [2;3]$
3. $[4;7] \cap [6;8] = [6;7]$
4. $[4;7] \cup [6;8] = [4;8]$

Méthode 4

Déterminer l'intersection, la réunion de deux intervalles

Propriété 4 ***(Résolution d'équations affines)***

On considère une *expression affine* : $ax+b$ où a et b sont deux nombres réels **avec** $a \neq 0$. L'*équation* $ax+b=0$ admet pour unique *solution* $x = -\frac{b}{a}$.

Méthode 5 ***(Résolution d'inéquations affines)***

Toutes les inéquations affines se résolvent de la même manière, en remplaçant *l'inégalité* par le symbole correspondant.

Résolvons $ax+b>0$:

$$ax+b>0 \Leftrightarrow ax>-b \qquad (I)$$

- Si $a>0$, $(I) \Leftrightarrow x>-\frac{b}{a}$. Les solutions sont $\left]-\frac{b}{a};+\infty\right[$.
- Si $a<0$, $(I) \Leftrightarrow x<-\frac{b}{a}$. Les solutions sont $\left]-\infty;-\frac{b}{a}\right[$.

Propriété 5 ***(Signe d'une expression affine : le tableau de signes)***

On peut résumer toutes les solutions d'inéquations affines dans un *tableau de signe* :

Si $a<0$

x	$-\infty$		$-\frac{b}{a}$		$+\infty$
$ax+b$		$+$	0	$-$	

Lecture du tableau : Le symbole $+$ signifie que si $x<-\frac{b}{a}$ alors $ax+b>0$.

Si $a>0$

x	$-\infty$		$-\frac{b}{a}$		$+\infty$
$ax+b$		$-$	0	$+$	

Méthode 6

Résoudre une inéquation

3. Encadrer un réel par deux nombres

Définition 5

On dit que les nombres réels a et b *encadrent* le nombre réel x si :

$$a<x<b$$

$b-a$ est *l'amplitude* de cet encadrement.

Théorème ***(Admis)***

Tout nombre réel x peut être encadré par deux nombres décimaux avec une amplitude choisie.

Exemple 4

- $1,2<\sqrt{2}<2$ est un encadrement de $\sqrt{2}$ d'amplitude $0,8$.
- $1,4<\sqrt{2}<1,5$, encadrement d'amplitude $0,1$ (au dixième).
- $1,41<\sqrt{2}<1,42$, encadrement d'amplitude $0,01$ (au centième).

Vocabulaire : - $1,41$ est une *valeur approchée par défaut*, - $\sqrt{2}$ est la *valeur exacte*, - $1,42$ est une *valeur approchée par excès*.

Méthode 7

Trouver des valeurs approchées d'un nombre réel.

4. Valeur absolue d'un nombre réel

Définition 6

On appelle *valeur absolue* d'un nombre réel a, le nombre noté $|a|$ et défini par :

$$|a|=\begin{cases} a & \text{si } a\geq 0,\\ -a & \text{si } a<0.\end{cases}$$

Exemple 5

$|3| = 3$ car $3 > 0$, $|-2| = -(-2) = 2$ car $-2 < 0$.

Propriété 5 ***(Admise)***

- Pour tout nombre réel a, $|a| \geq 0$,
- a et $-a$ ont la même valeur absolue,
- $|a - b| = |b - a|$; $|a \times b| = |a| \times |b|$ et $|a + b| \leq |a| + |b|$.

Définition 7 ***(Distance entre deux nombres réels)***

La *distance* entre les réels a et b est $|b - a|$. C'est ce qu'on appelle souvent *l'écart* entre ces nombres.

Exemple 6

La distance entre $3,5$ et 10 est $|10 - 3,5| = |6,5| = 6,5$.

Remarque 3

On réalise **d'abord** les additions et soustractions dans les valeurs absolues avant d'essayer de les enlever.

Méthode 8

Résoudre des inéquations et des équations comportant des valeurs absolues.