Seconde - Fonctions affines

1. Rappels : définitions et propriétés

1. Définition

Une **fonction affine** est une fonction définie sur $\mathbb{R}$ dont l'expression peut s'écrire $f(x) = ax + b$.

Les réels a et b sont constants.

a est **le coeficient directeur**, b est **l'odonnée à l'origine**.

2. Exemples

On donne $f(x) = 2x - 4$, $g(x) = (1 - x)^2$ et $h(x) = x^2 - (x + 1)^2$.

- f est affine avec $a = 2$ et $b = -4$.
- g n'est pas affine. On peut développer $g(x) = 1 - 2x + x^2$ et on ne peut se débarasser du terme en x^2
- h est affine, en effet $h(x) = x^2 - (x^2 + 2x + 1) = -2x - 1$. Ainsi $a = -2$ et $b = -1$.

3. Théorème

La représentation graphique d'une fonction affine **est une droite**.

Pour la représenter on peut choisir deux valeurs de x :

x	0	1
$2x - 4$	-4	-2

2. Coefficient directeur et ordonnée à l'origine

1. Lecture graphique

- L'ordonnée à laquelle la courbe de la fonction f définie par $f(x) = ax + b$ coupe l'axe des ordonnées est b.
- Le coefficient directeur se lit en choisissant deux points de la droite, séparés d'un en absissce. L'écart sur les ordonnées entre le point de gauche et le point de droite est a.

Exemple Pour la fonction $f(x) = 2x - 4$ tracée ci-dessus, le coefficient directeur est 2 et l'ordonnée à l'origine -4.

2. Par le calcul

Pour deux points distincts $A(x_A, y_A)$ et $B(x_B, y_B)$ avec $x_B \neq x_A$ de la droite d, on a

$$a = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} \text{ et } b = y_A - ax_A$$

Ainsi, $d = (AB)$ est la représentation graphique de $f(x) = ax + b$.

3. Sens de variation des fonctions affines

Soit f la fonction affine $f : x \mapsto ax + b$ alors :

- si $a > 0$, f est **strictement croissante** sur $\mathbb{R}$,
- si $a < 0$, f est **strictement décroissante** sur $\mathbb{R}$,
- si $a = 0$, f est **constante** sur $\mathbb{R}$.

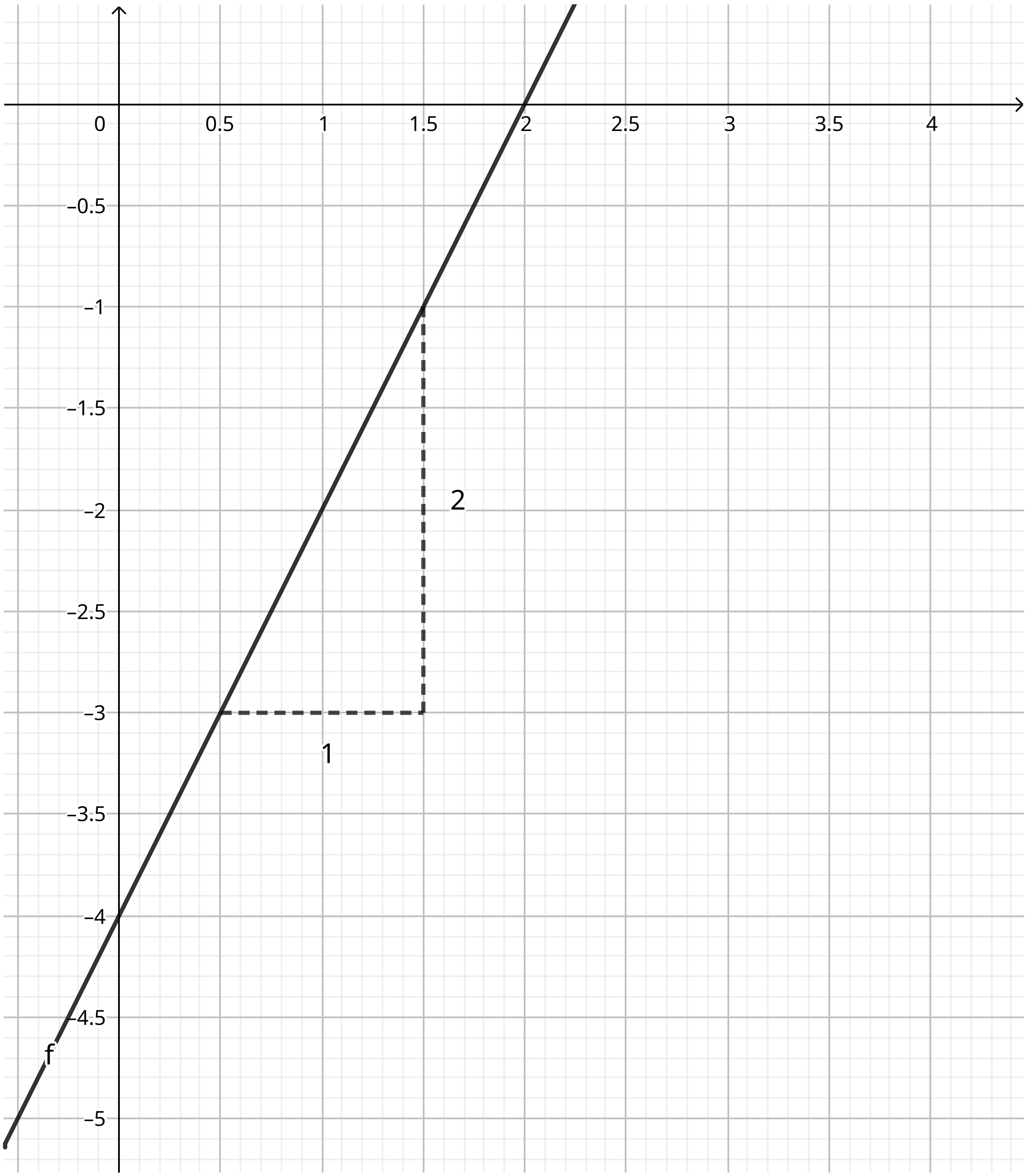
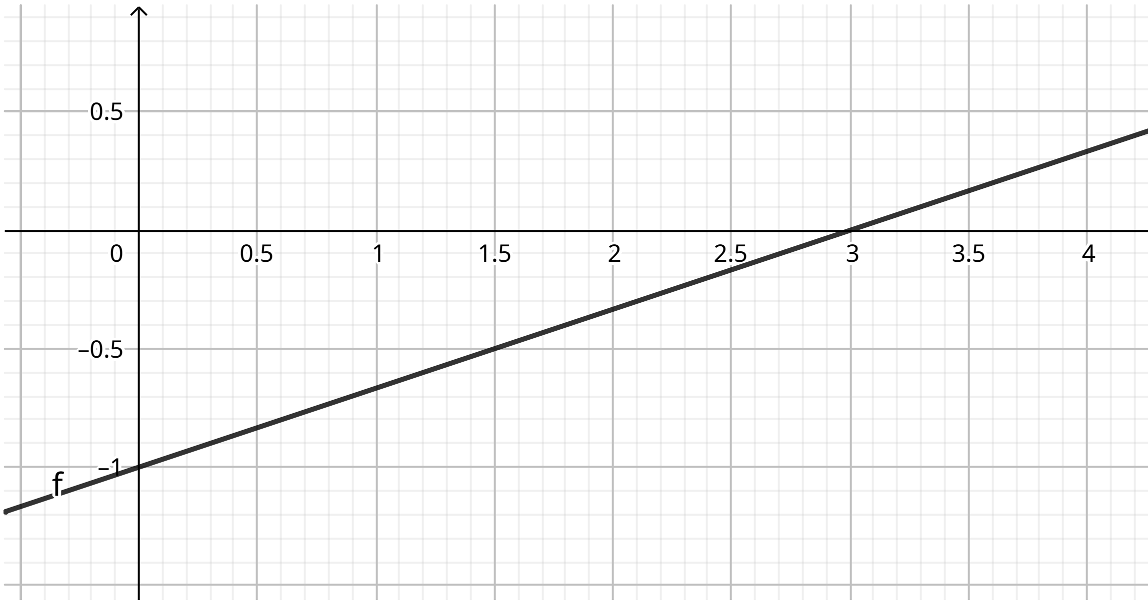
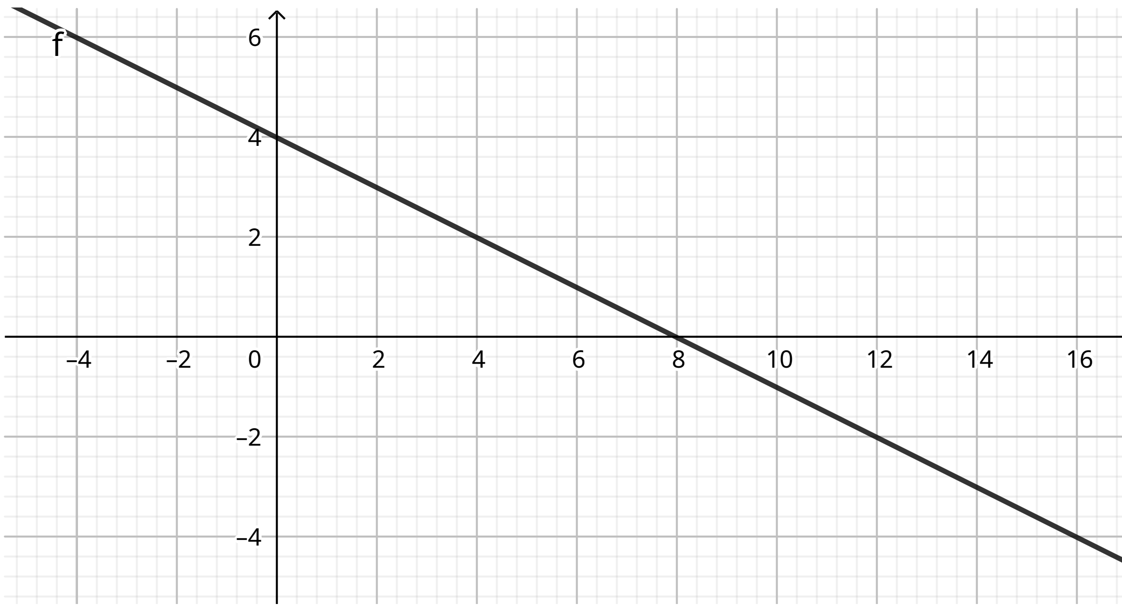


Figure 1: fig 1



$a > 0$, f est strictement croissante.



$a < 0$, f est strictement décroissante.

Remarque : si $b = 0$, la fonction est dite *linéaire* et sa courbe passe par l'origine.

4. Signe d'une fonction affine

$f(x) = \dfrac{1}{3}x - 1$ est affine avec $a = \dfrac{1}{3} > 0$ donc est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

De plus, $f(3) = 0$ donc :

- pour tout $x < 3$, $f(x) < 0$
- pour tout $x > 3$, $f(x) > 0$

Théorème

Le signe d'une fonction affine $f(x) = ax + b$ avec $a \neq b$ est déterminé par deux éléments :

- Le signe de a
- la valeur de $-\frac{b}{a}$

Il se résume ainsi :

x	$-\infty$	$-\dfrac{b}{a}$	$+\infty$
$ax+b$	signe de $-a$	0	signe de a

Figure 2: tableau de signe