MIASHS - Visio du Jeudi 12 novembre, 10h15

Infos à ce jour : le partiel, s'il a lieu, devrait se dérouler autour du 20/11.

Il portera sur les chapitres 1 & 2 ainsi que limites de fonctions.

Exercices supplémentaires

Exercice 3.11. Déterminer les domaines de définition des fonctions f, g, $f \circ g$ et $g \circ f$ ainsi que les expressions des composées $f \circ g$ et $g \circ f$ dans les cas suivants :

1. $f(x) = \sqrt{x}$ et $g(x) = x^2 - 2x + 4$,
2. $f(x) = \sqrt{x}$ et $g(x) = x^2 + x - 2$,
3. $f(x) = \dfrac{1+x}{1-x}$ et $g(x) = \dfrac{x}{1-x}$,
4. $f(x) = \dfrac{x}{1+x^2}$ et $g(x) = \dfrac{1}{x}$.

1) $f(x) = \sqrt{x}$ $\quad \mathcal{D}_f = [0, +\infty[$

$g(x) = x^2 - 2x + 4$, $\mathcal{D}_g = \mathbb{R}$

$f \circ g : \mathcal{D}_{f\circ g} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto f(g(x))$ ← dans le même ordre que $f \circ g$

$f \circ g : x \longmapsto g(x) = x^2 - 2x + 4 \longmapsto f(g(x)) = \sqrt{x^2 - 2x + 4}$ ← expression de $f \circ g(x)$

$\mathcal{D}_{f\circ g} = \{ x \in \mathbb{R},\ g(x) \in \mathcal{D}_f \} = \{ x \in \mathbb{R},\ x^2 - 2x + 4 \geqslant 0 \}$

$g(x) \in \mathcal{D}_f \Leftrightarrow g(x) \geqslant 0$

On résout $x^2 - 2x + 4 \geqslant 0$ dans $\mathbb{R}$

$\Delta = 4 - 4 \times 4 = -12 < 0$ donc $x^2 - 2x + 4 > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

Ou … $x^2 - 2x + 4 = x^2 - 2x + 1 + 3 = (x-1)^2 + 3 > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

$\mathcal{D}_{f\circ g} = \mathbb{R}$, $\quad f \circ g(x) = \sqrt{x^2 - 2x + 4}$

$g \circ f$? $\quad \mathcal{D}_{g\circ f} = \{ x \in \mathbb{R},\ f(x) \in \mathcal{D}_g \} = \{ x \in \mathbb{R},\ \sqrt{x} \in \mathbb{R} \} = \mathcal{D}_f = [0, +\infty[$.

$\forall x \geqslant 0$ $\quad g \circ f(x) = \sqrt{x}^2 - 2\sqrt{x} + 4 = x - 2\sqrt{x} + 4$

⚠ Quel que soit le domaine de définition de la dernière expression on conserve $\mathcal{D}_{g\circ f} = [0, +\infty[$.

2) $f(x) = \sqrt{x}$, $g(x) = x^2 + x - 2$

$\mathcal{D}_f = [0; +\infty[$ $\mathcal{D}_g = \mathbb{R}$.

$\mathcal{D}_{f \circ g} = \{ x \in \mathcal{D}_g,\ g(x) \in \mathcal{D}_f \} = \{ x \in \mathbb{R},\ x^2 + x - 2 \geq 0 \}$

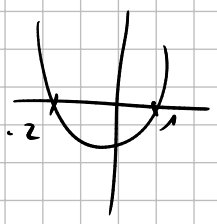
$f \circ g(x) = f(g(x)) = \sqrt{x^2 + x - 2}$

① résout $x^2 + x - 2 \geq 0$ $\Delta = 1 + 8 = 9 = 3^2 \geq 0$

$x_1 = \frac{-1-3}{2} = -2$ $x_2 = \frac{-1+3}{2} = 1$.

$\forall x \in \mathbb{R}$, $x^2 + x - 2 = (x+2)(x-1)$

x	$-\infty$		-2		1		$+\infty$
$x^2 - 2x + 1$		$+$	ϕ	$-$	ϕ	$+$	



$\mathcal{D}_{f \circ g} =]-\infty; -2] \cup [1; +\infty[$.

$\mathcal{D}_{g \circ f} = \{ x \in \mathcal{D}_f,\ f(x) \in \mathcal{D}_g \} = \{ x \in \mathbb{R}_+,\ \sqrt{x} \in \mathbb{R} \} = \mathbb{R}_+$

$g \circ f(x) = g(f(x)) = \sqrt{x}^2 + \sqrt{x} - 2 = x + \sqrt{x} - 2$.

3. $f(x) = \frac{1+x}{1-x}$ $\quad g(x) = \frac{x}{1-x}$

$\mathcal{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{1\}$ $\quad \mathcal{D}_g = \mathbb{R} \setminus \{1\}$

$\mathcal{D}_{f \circ g} = \{ x \in \mathcal{D}_g,\ g(x) \in \mathcal{D}_f \} = \{ x \in \mathbb{R} \setminus \{1\},\ \frac{x}{1-x} \neq 1 \}$

$f \circ g(x) = f(g(x)) = \frac{1+g(x)}{1-g(x)} = \frac{1+\frac{x}{1-x}}{1-\frac{x}{1-x}} = \frac{1-x+x}{1-x-x} = \frac{1}{1-2x}$

Résolvons $\frac{x}{1-x} = 1 \iff x = 1-x \iff x = \frac{1}{2}$

$\mathcal{D}_{f \circ g} = \mathbb{R} \setminus \{1 ; \frac{1}{2}\}$ ⚠ Ce n'est pas $\mathbb{R} \setminus \{\frac{1}{2}\}$

$\mathcal{D}_{g \circ f} = \{ x \in \mathcal{D}_f,\ f(x) \in \mathcal{D}_g \} = \{ x \in \mathbb{R} \setminus \{1\},\ \frac{1+x}{1-x} \neq 1 \}$

$g \circ f(x) = g(f(x)) = \frac{\frac{1+x}{1-x}}{1-\frac{1+x}{1-x}} = \frac{1+x}{1-x-1-x} = \frac{1+x}{-2x}$.

On résout $\frac{1+x}{1-x} = 1 \iff 1+x = 1-x \iff x = 0$.

$\mathcal{D}_{g \circ f} = \mathbb{R} \setminus \{0 ; 1\}$.

4. $f(x) = \frac{x}{1+x^2}$ $\quad g(x) = \frac{1}{x}$

$\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$, $\quad \forall x \in \mathbb{R}$, $\quad 1+x^2 > 0$

$\mathcal{D}_g = \mathbb{R}^*$

$\mathcal{D}_{f \cdot g} = \left\{ x \in \mathcal{D}_g,\ g(x) \in \mathcal{D}_f \right\} = \left\{ x \in \mathbb{R}^*,\ \frac{1}{x} \in \mathbb{R} \right\} = \mathbb{R}^*$

$f \circ g(x) = f(g(x)) = \frac{\frac{1}{x}}{1+\left(\frac{1}{x}\right)^2} = \frac{1}{x\left(1+\frac{1}{x^2}\right)} = \frac{1}{x+\frac{1}{x}} = \frac{x}{x^2+1}$

$\mathcal{D}_{g \circ f} = \left\{ x \in \mathcal{D}_f,\ f(x) \in \mathcal{D}_g \right\} = \left\{ x \in \mathbb{R},\ \frac{x}{1+x^2} \in \mathbb{R}^* \right\} = \mathbb{R}^*$

$g \circ f(x) = g(f(x)) = \frac{1}{\frac{x}{1+x^2}} = \frac{1+x^2}{x}$.

Exercice 3.12. Soit $f(x) = \dfrac{x}{1+x}$. On note $f^1 = f$ et, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $f^{n+1} = f \circ f^n$.

1. Donner le domaine de définition de f.
2. Montrer que f est strictement croissante sur $]-\infty, -1[$ et sur $]-1, +\infty[$.
3. Calculer f^2 et f^3 après avoir déterminé leur domaine de définition.
4. Proposer une expression de $f^n(x)$ et prouver celle-ci par récurrence.

f, $f^{(2)} = f \circ f$, $f^{(3)} = f \circ (f \cdot f) = f \circ f \cdot f$ etc.

1. $\mathcal{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$

2. $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$, $f(x) = \dfrac{x}{1+x} = \dfrac{1+x-1}{1+x} = 1 - \dfrac{1}{1+x}$

$\mathbb{R} \setminus \{-1\} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto 1+x$; $\to \mathbb{R}$, $\mapsto \dfrac{1}{1+x}$; $\to \mathbb{R}$, $\mapsto 1 - \dfrac{1}{1+x}$

la composée de 2 fct ↘ est ↗ ...

$\Rightarrow f$ ↗ sur chaque intervalle de domaine.

On dérive...

f rationnelle donc dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ $\quad \left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$

$\forall x \neq -1$, $f'(x) = \dfrac{1(1+x) - x \cdot 1}{(1+x)^2} = \dfrac{1}{(1+x)^2} > 0$

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	‖	$+$	
f	↗		‖	↗	

3. $f^{(2)}$ et $f^{(3)}$ ...

$\mathcal{D}_{f^{(2)}} = \left\{ x \in \mathcal{D}_f,\ f(x) \in \mathcal{D}_f \right\} = \left\{ x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\},\ \dfrac{x}{1+x} \neq -1 \right\}$

$f^{(2)}(x) = \dfrac{\frac{x}{1+x}}{1 + \frac{x}{1+x}} = \dfrac{x}{1+x+x} = \dfrac{x}{1+2x}$.

On résout $\dfrac{x}{1+x} = -1$ dans $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$

$\Leftrightarrow \quad x = -1 - x \quad \Leftrightarrow \quad 2x = -1 \quad \Leftrightarrow \quad x = -\dfrac{1}{2}$

$\mathcal{D}_{f^{(2)}} = \mathbb{R} \setminus \left\{-1 ; -\dfrac{1}{2}\right\}$.

$$\mathcal{D}_{f^{(3)}} = \left\{ x \in \mathcal{D}_{f^{(2)}},\ f^{(2)}(x) \in \mathcal{D}_f \right\} = \left\{ x \in \mathbb{R} \setminus \left\{-1; -\tfrac{1}{2}\right\},\ \frac{x}{1+2x} \neq -1 \right\}$$

$$f^{(3)}(x) = \frac{\frac{x}{1+2x}}{1+\frac{x}{1+2x}} = \frac{x}{1+2x+x} = \frac{x}{1+3x}.$$

On résout $\frac{x}{1+2x} = -1$, $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{-1; -\frac{1}{2}\right\}$,

$\Leftrightarrow \quad x = -1-2x \quad \Leftrightarrow \quad 3x = -1 \quad \Leftrightarrow \quad x = -\frac{1}{3}$.

$$\mathcal{D}_{f^{(3)}} = \mathbb{R} \setminus \left\{-1; -\tfrac{1}{2}; -\tfrac{1}{3}\right\}.$$

---

4. D'après les 3 précédents, on propose $f^{(n)}(x) = \frac{x}{1+nx}$, $\forall n \geq 1$.

$$\mathcal{D}_{f^{(n)}} = \mathbb{R} \setminus \left\{-1; -\tfrac{1}{2}; -\tfrac{1}{3}; \dots; -\tfrac{1}{n}\right\}.$$

Par récurrence. I. Vrai pour $n=1$. [Rq Vrai pour $n = 1, 2, 3 \dots$]

II Supposons $\exists\, n \in \mathbb{N}^*$,

- $\mathcal{D}_f = \mathbb{R} \setminus \left\{-1; -\frac{1}{2}; \dots; -\frac{1}{n}\right\}$
- $f^{(n)}(x) = \frac{x}{1+nx}$.

Alors
- $f^{(n+1)} = f \circ f^{(n)}$
- $\mathcal{D}_{f^{(n+1)}} = \left\{ x \in \mathcal{D}_{f^{(n)}},\ f^{(n)}(x) \in \mathcal{D}_f \right\}$

$$\mathcal{D}_{f^{(n+1)}} = \left\{ x \in \mathbb{R} \setminus \left\{-1; -\tfrac{1}{2}; \dots; -\tfrac{1}{n}\right\},\ \frac{x}{1+nx} \neq -1 \right\}.$$

- $f^{(n+1)}(x) = f\left(f^{(n)}(x)\right) = \dfrac{\frac{x}{1+nx}}{1+\frac{x}{1+nx}} = \dfrac{x}{1+nx+x} = \dfrac{x}{1+(n+1)x}$

On résout $\frac{x}{1+nx} = -1$, $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{-1; -\frac{1}{2}; \dots; -\frac{1}{n}\right\}$

$\Leftrightarrow \quad x = -1-nx \quad \Leftrightarrow \quad (n+1)x = -1 \quad \Leftrightarrow \quad x \neq -\frac{1}{n+1}$

$$\mathcal{D}_{f^{(n+1)}} = \mathbb{R} \setminus \left\{-1; -\tfrac{1}{2}; \dots; -\tfrac{1}{n}; -\tfrac{1}{n+1}\right\}.$$

III D'après le pcpe de récurrence $\mathcal{D}_{f^{(n)}} = \mathbb{R} \setminus \left\{-1, -\frac{1}{2}, \dots, -\frac{1}{n}\right\}$

$$f^{(n)}(x) = \frac{x}{1+nx}$$

Q ? Peut-on dire que $\mathcal{D}_{f^{(n)}} = \mathbb{R} \setminus \{-\frac{1}{n}\}$ $\forall n \in \mathbb{N}^*$

⚠ **NON**

$$f^{(n)}(x) = \underbrace{f \circ f \circ f \circ \cdots \circ f}_{n \text{ fois}}(x)$$

Ex $n = 5$, $x = -\frac{1}{3}$

$$f \circ f \circ f \circ f \circ f\left(-\frac{1}{3}\right)$$
$$= f \circ f\left(\underbrace{f^{(3)}\left(-\frac{1}{3}\right)}_{\text{Qui n'est pas défini}}\right)$$

Exercice 3.13. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) = |x+1| + |x-1| - 4$.

1. Montrer que f est paire.
2. Donner une expression de f ne faisant pas intervenir la valeur absolue.
3. Étudier la continuité de f et tracer le graphe de f.
4. Résoudre, dans $\mathbb{R}$, l'équation et l'inéquation suivantes :

(a) $|x+1| + |x-1| = 4$, (b) $|x+1| + |x-1| \leq 4$.

1. f est paire si . $\mathcal{D}_f$ symétrique / 0
. $\forall x \in \mathcal{D}_f$, $f(-x) = f(x)$

ici, $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(-x) = |-x+1| + |-x-1| - 4$

Rappel $|-y| = |y|$, $\forall y \in \mathbb{R}$

$= |x+1| + |x-1| - 4$

$= f(x)$.

CCL f est paire.

2.

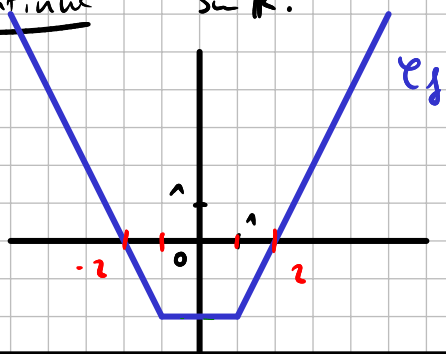
x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$x+1$		$-$	0	$+$		$+$	
$x-1$		$-$		$-$	0	$+$	

$$f(x) = \begin{cases} -x-1-x+1-4 & \text{si } x \leq -1 \\ x+1-x+1-4 & \text{si } -1 < x < 1 \\ x+1+x-1-4 & \text{si } x \geq 1 \end{cases} = \begin{cases} -2x-4, & \text{si } x \leq -1 \\ -2, & \text{si } -1 < x < 1 \\ 2x-4, & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

---

3. Continuité $f(x) = |x+1| + |x-1| - 4$.

f est la composée de fct polynômiales par la $|\cdot|$ qui est continue sur $\mathbb{R}$. f est continue sur $\mathbb{R}$.



4. a) $\forall x \in \mathbb{R}$, $|x+1| + |x-1| = 4 \iff f(x) = 0$

$$\begin{cases} -2x-4, & \text{si } x \leq -1 \\ -2, & \text{si } -1 < x < 1 \\ 2x-4, & \text{si } x \geqslant 1 \end{cases}$$

$\forall x \leq -1$, $f(x) = 0 \iff -2x-4 = 0 \iff x = -2$

$\forall x \in]-1;1[$, $f(x) = 0 \iff -2 = 0$ impossible

$\forall x \geqslant 1$, $f(x) = 0 \iff 2x-4 = 0 \iff x = 2$

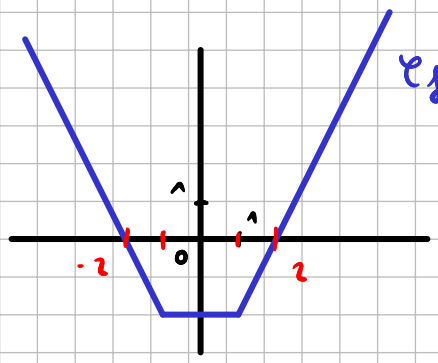
$$\mathcal{S} = \{-2 ; 2\}$$

b) $\forall x \in \mathbb{R}$, $|x+1| + |x-1| \leq 4 \iff f(x) \leq 0$

- $\forall x \leq -1$, $f(x) \leq 0 \iff -2x-4 \leq 0 \iff x \geqslant -2$
  $\iff x \in [-2;-1]$
- $\forall x \in]-1;1[$, $f(x) \leq 0 \iff -2 \leq 0$ toujours vrai
  $\iff x \in]-1;1[$
- $\forall x \geqslant 1$, $f(x) \leq 0 \iff 2x-4 \leq 0 \iff x \leq 2$
  $\iff x \in [1;2]$.

La solution complète est l'union des 3 intervalles

$$\mathcal{S} = [-2;-1] \cup]-1;1[\cup [1;2] = [-2;2]$$



Q! Peut-on résoudre $f(x) \leq 0$ graphiquement ?

$\mathcal{S} = [-2;-1] \cup]-1;1[\cup [1;2]$

$\mathcal{S} = [-2;2]$

faisable mais pénible à rédiger.