MIASHS Visio du 5/11/2026 10h15

Exercice 3.9. Soit la fonction f définie sur $[-1,+\infty[$ par $f(x)=\sqrt{x^2(x+1)}$.

1. Étudier la dérivabilité de f en -1 et en 0.
2. Calculer $f'(x)$ pour $x\neq -1$ et $x\neq 0$. En déduire les variations de f.
3. Calculer la limite de f en $+\infty$ puis dresser le tableau des variations de f.
4. Tracer le graphe de f.
5. Montrer que la restriction g de f à $[0,+\infty[$ réalise une bijection de $[0,+\infty[$ sur $[0,+\infty[$.
6. Justifier que g^{-1} est dérivable sur $[0,+\infty[$. Quelle est la valeur de $(g^{-1})'_d(0)$?

1. $\forall x\in[-1;+\infty[\quad f(x)=\sqrt{x^2(x+1)}$

- $\forall x\in[-1;+\infty[$, $x+1\geq 0$ donc f est bien définie sur $[-1;+\infty[$.
- f est la composée d'un polynôme par $\sqrt{\ }$ et est continue sur $[-1;+\infty[$
- $\sqrt{\ }$ est dérivable sur $]0;+\infty[$ donc f dérivable lorsque $x^2(x+1)>0$

  c'à d sur $]-1;0[\cup]0;+\infty[$ dommage :/

On revient à la définition ...

En 0 f dérivable si $\lim\limits_{x\to 0} T_0(x)\in\mathbb{R}$ où $T_0(x)=\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=\dfrac{\sqrt{x^2(x+1)}}{x}$

on $\sqrt{x^2}=|x|$, $\forall x\in\mathbb{R}$

$T_0(x)=\dfrac{|x|\sqrt{x+1}}{x}$

donc si $x>0$, $T_0(x)=\sqrt{x+1}$ et $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} T_0(x)=1=f'_d(0)$

si $x<0$, $T_0(x)=-\sqrt{x+1}$ et $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} T_0(x)=-1=f'_g(0)$ $\neq$

Donc f dérivable à droite et à gauche mais n'est pas dérivable en 0

$f'_g(0)=-1$, $f'_d(0)=1$

En -1, à droite $\quad T_{-1}(x)=\dfrac{f(x)-f(-1)}{x+1}=\dfrac{\sqrt{x^2(x+1)}-0}{x+1}$

Au voisinage de -1, $\sqrt{x^2}=|x|=-x$ donc

$T_{-1}(x)=\dfrac{-x\sqrt{x+1}}{x+1}=\dfrac{-x}{\sqrt{x+1}}$

on l'aurait vu en Q4

$\lim\limits_{\substack{x\to -1\\ >}} T_{-1}(x)=\lim\limits_{\substack{x\to -1\\ >}}\dfrac{-x}{\sqrt{x+1}}=\dfrac{"+1"}{0^+}=+\infty\notin\mathbb{R}$

f n'est pas dérivable à droite (ni dérivable tout court) en -1.

2. $f(x) = \sqrt{x^2(x+1)}$ dérivable sur $]-1;0[\cup]0;+\infty[$ cf Q1

$(u^n)' = n u' u^{n-1}$ $\quad n \neq -1$ $\quad (uv)' = u'v + uv'$

$\forall x > -1$, $f(x) = \left(x^2(x+1)\right)^{\frac{1}{2}}$ donc

$$f'(x) = \frac{1}{2}\left(x^2(x+1)\right)'\left(x^2(x+1)\right)^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\left(2x(x+1)+x^2\right)\left(x^2(x+1)\right)^{-\frac{1}{2}}$$

$$f'(x) = \frac{2x(x+1)+x^2}{2\sqrt{x^2(x+1)}}$$

le signe de $f'(x)$ donne les sens de variation → on factorise $f'(x)$

$$f'(x) = \frac{3x^2+2x}{2\sqrt{x^2(x+1)}} = \frac{x(3x+2)}{2\sqrt{x^2(x+1)}}$$

$$f\left(-\frac{2}{3}\right) = \sqrt{\frac{4}{9}\cdot\frac{1}{3}} = \frac{2}{3\sqrt{3}}$$

3.

x	-1		$-\frac{2}{3}$		0		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$	0	$-$	‖	$+$	
f	0	↗	$\frac{2}{3\sqrt{3}}$	↘	0	↗	$+\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x^2(x+1)} = \sqrt{+\infty} = +\infty$.

$\sqrt{3} \simeq 1{,}7$

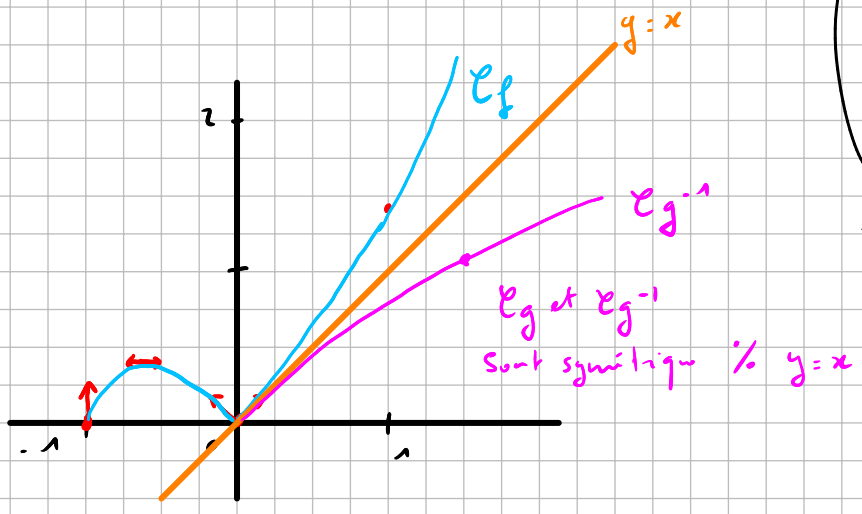
$3\sqrt{3} \simeq 5{,}1$ pas sur la copie

$\frac{2}{3\sqrt{3}} \simeq 0{,}4$

$f(1) = \sqrt{2} \simeq 1{,}4$

$f(2) = \sqrt{4\cdot 3} = \sqrt{12} \simeq 3{,}\ldots$

4.



5. La restriction de f à $[0;+\infty[$, notée $g = f|_{[0;+\infty[}$ est :

- continue sur $[0;+\infty[$ (Q1)
- strictement croissante (Q3)
- à image dans $[0;+\infty[$ (Q3)

Donc, d'après le Th. de la bijection, g réalise une bijection de $[0;+\infty[$ dans $[0;+\infty[$.

6. g dérivable sur $]0;+\infty[$ (Q1) et $g'(x) \neq 0$ sur $]0;+\infty[$

donc g^{-1} est dérivable sur $]0;+\infty[$ (cours)

g dérivable à droite en 0 et $g'_d(0) = 1$ (Q1)

Donc $\left(g^{-1}\right)'_d(0) = \lim\limits_{\substack{y \to 0 \\ >}} \dfrac{g^{-1}(y) - g^{-1}(0)}{y - 0} = \lim\limits_{\substack{y \to 0 \\ >}} \dfrac{g^{-1}(y)}{y} = \dfrac{1}{\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} \frac{g(x)}{x}} = \dfrac{1}{1} = 1.$

(cours ↓ Q1 ↓)

Q4 détails

$\forall x > 0, \forall y > 0 \quad g(x) = y \iff g^{-1}(y) = x$

$g^{-1}(0) = 0 \Rightarrow \boxed{x \underset{>}{\to} 0 \iff y \underset{>}{\to} 0}$ et $g \nearrow$

$\Rightarrow \lim\limits_{\substack{y \to 0 \\ >}} \dfrac{g^{-1}(y)}{y} = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} \dfrac{x}{g(x)}$

CCL $\quad \left(g^{-1}\right)'_d(0) = 1.$

Exercice 3.10. Étudier la fonction f dans les cas suivants :

1. $f(x) = \dfrac{x+1}{x-1}$ 2. $f(x) = \dfrac{x^2-x-1}{x-2}$ 3. $f(x) = \dfrac{\sqrt{x^2-1}}{x}$.

On précisera le domaine de définition, les limites aux bornes et branches infinies, sens de variation et convexité et on tracera le graphe de f.

1) $f(x) = \dfrac{x+1}{x-1}$ fct homographique

$D_f = \mathbb{R}\setminus\{1\}$. f rationnelle donc continue et dérivable sur $\mathbb{R}\setminus\{1\}$

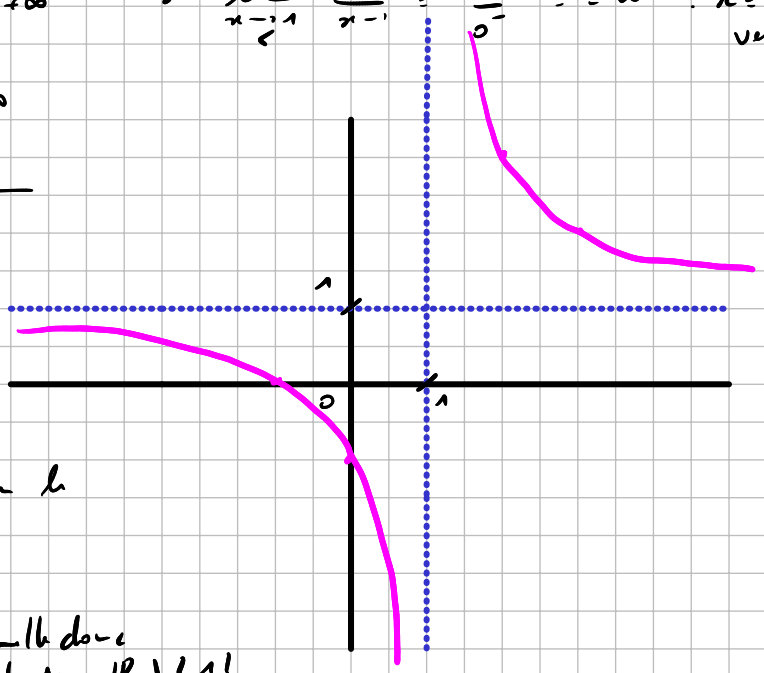
$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$

- $f'(x) = \dfrac{x-1-(x+1)}{(x-1)^2} = \dfrac{-2}{(x-1)^2} < 0$ sur $\mathbb{R}\setminus\{1\}$

- $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x+1}{x-1} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x}{x} = 1$ · $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x+1}{x-1} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x}{x} = 1$: $y=1$ Asymptote horizontale en $\pm\infty$

- $\lim\limits_{\substack{x\to1\\ >}} \dfrac{x+1}{x-1} = \dfrac{2}{0^+} = +\infty$ · $\lim\limits_{\substack{x\to1\\ <}} \dfrac{x+1}{x-1} = \dfrac{2}{0^-} = -\infty$: $x=1$ Asymptote verticale à C_f

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	‖	$-$	
f	1	↘	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↘	1



La convexité est donnée par le signe de $f''(x)$.

$f'(x) = \dfrac{-2}{(x-1)^2}$. Rationnelle donc dérivable sur $\mathbb{R}\setminus\{1\}$

$f'(x) = -2(x-1)^{-2}$

$f''(x) = 4 \cdot 1 \cdot (x-1)^{-3} = \dfrac{4}{(x-1)^3}$

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f''(x)$		$-$	‖	$+$	
f		Concave	‖	Convexe	

2) $f(x) = \dfrac{x^2 - x - 1}{x - 2}$ ← N, ← D

$\mathcal{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{2\}$

f rationnelle donc continue et 2 fois dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{2\}$.

Conseil :
Si $\deg(N) > \deg(D)$, division polynomiale de N par D.

$$\begin{array}{r|l} x^2 - x - 1 & x - 2 \\ \ominus\ x^2 - 2x & \hline & x + 1 \\ \hline x - 1 & \\ \ominus\ x - 2 & \\ \hline 1 & \end{array}$$

1 s'arrête qd $\deg(\text{reste}) < \deg(D)$

$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{2\}$, $f(x) = x + 1 + \dfrac{1}{x-2}$

$\left(\frac{1}{u}\right)' = \frac{-u'}{u^2}$

Donc $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{2\}$, $f'(x) = 1 - \dfrac{1}{(x-2)^2} = \dfrac{(x-2)^2 - 1}{(x-2)^2} = \dfrac{(x-3)(x-1)}{(x-2)^2}$.

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = "+\infty + 0" = +\infty$ $\quad$ $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = "-\infty + 0" = -\infty$

De plus $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) - (x+1) = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{2}{x-2} = 0$ donc $\Delta : y = x + 1$ est asymptote oblique à $\mathcal{C}_f$ en $\pm\infty$.

$\lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ >}} f(x) = "3 + \frac{1}{0^+}" = +\infty$ $\quad$ $\lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ <}} f(x) = "3 + \frac{1}{0^-}" = -\infty$.

$x = 2$ est A.V. à $\mathcal{C}_f$.

$f'(x)$ du signe de $(x-3)(x-1)$ sur $\mathbb{R} \setminus \{2\}$

$f(1) = 2 + \frac{1}{-1} = 1$

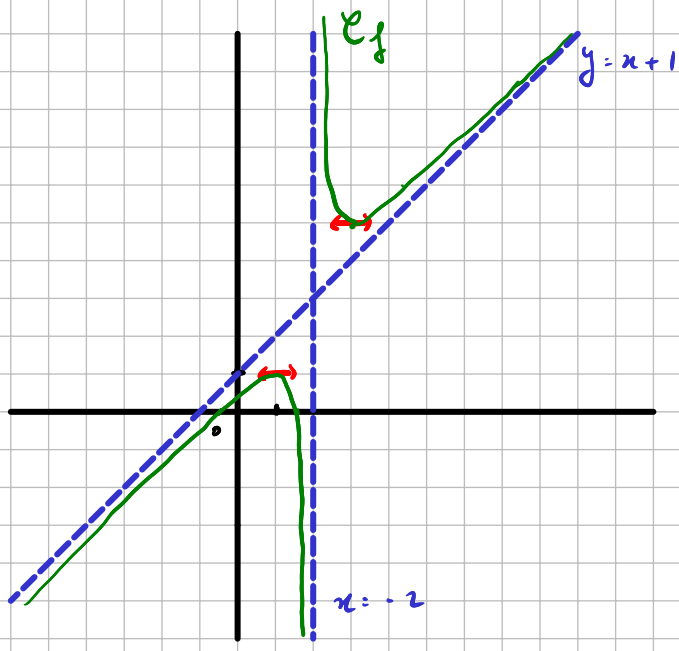
$f(3) = 4 + \frac{1}{1} = 5$

x	$-\infty$		1		2		3		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	1	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	5	↗	$+\infty$
f		concave				convexe			

La convexité est donnée par le signe de $f''(x)$.

$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{2\}$, $f''(x) = \left(1 - \dfrac{1}{(x-2)^2}\right)' = \left(1 - (x-2)^{-2}\right)' = 2(x-2)^{-3}$

du signe de $x - 2$



$f(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$

Nb d'or ...

3. $f(x) = \dfrac{\sqrt{x^2-1}}{x} = \dfrac{\sqrt{(x-1)(x+1)}}{x}$

$f(3) = \dfrac{\sqrt{8}}{3} = \dfrac{2\sqrt{2}}{3} \simeq 0,9$

$\mathcal{D}_f =]-\infty ; -1] \cup [1 ; +\infty[$

Par composition et quotient :
- f continue sur $\mathcal{D}_f$
- f dérivable sur $]-\infty ; -1[\cup]1 ; +\infty[$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}}{x} = 1$ $\quad y = 1$ A.O. à $\mathcal{C}_f$ en $+\infty$.

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{-x\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}}{x} = -1$ $\quad y = -1$ A.O. à $\mathcal{C}_f$ en $-\infty$.

$f(1) = f(-1) = 0$

$f'(x) = \dfrac{\frac{2x}{2\sqrt{x^2-1}} \cdot x - \sqrt{x^2-1}}{x^2} = \dfrac{x^2 - (x^2-1)}{x^2\sqrt{x^2-1}} = \dfrac{1}{x^2\sqrt{x^2-1}} > 0$ sur $\mathcal{D}_f$,

$\forall x \in]-\infty ; -1[\cup]1 ; +\infty[$.

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$	$+$		$\times$		$+$		
f		$\nearrow$	0	$\nearrow$	0	$\nearrow$	

$f'(x) = x^{-2}(x^2-1)^{-\frac{1}{2}}$

$\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ >}} f'(x) = \text{"}\frac{1}{0^+}\text{"} = +\infty$

$\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ <}} f'(x) = \text{"}\frac{1}{0^+}\text{"} = +\infty$

$f''(x) = -2x^{-3}(x^2-1)^{-\frac{1}{2}} - \frac{1}{2} \cdot 2x \cdot (x^2-1)^{-\frac{3}{2}} x^{-2} = \dfrac{-2}{x^3\sqrt{x^2-1}} - \dfrac{1}{x(x^2-1)\sqrt{x^2-1}}$

$f''(x) = \dfrac{-2(x^2-1) - x^2}{x^3(x^2-1)\sqrt{x^2-1}} = \dfrac{2-3x^2}{x^3(x^2-1)\sqrt{x^2-1}} = \dfrac{(\sqrt{2}-\sqrt{3}x)(\sqrt{2}+\sqrt{3}x)}{x^3(x^2-1)\sqrt{x^2-1}}$.

$f''(x) = 0 \iff x = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \notin \mathcal{D}_{f''}$ ou $x = -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \notin \mathcal{D}_{f''}$

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f''(x)$		$+$	‖	$\times$	‖	$-$	
f		CVX				CCV	

