MIASH Mercredi 4 Novembre 13h15

Exercice 3.7. Déterminer les domaines de continuité et de dérivabilité de la fonction f dans les cas suivants :

1. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2+\sqrt{x^2}}{|x|} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0. \end{cases}$ 2. $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\left(\dfrac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$

On calculera la dérivée de f sur le domaine approprié.

1. $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$.

f est continue sur $\mathbb{R}^*$ comme quotient et composée de fonctions continues.

Seul point incertain en 0.

f est continue en 0 si $\lim_{x\to 0} f(x) = f(0)$

- $f(0) = 1$
- $\lim_{x\to 0} \dfrac{x^2+\sqrt{x^2}}{|x|} = ?$

Si $x > 0$, $f(x) = \dfrac{x^2+x}{x} = x+1$. $\lim_{\substack{x\to 0 \\ >}} f(x) = \lim_{\substack{x\to 0 \\ >}} x+1 = 1$.

Si $x < 0$, $f(x) = \dfrac{x^2-x}{-x} = \dfrac{x(x-1)}{-x} = -x+1$. $\lim_{\substack{x\to 0 \\ <}} f(x) = \lim_{\substack{x\to 0 \\ <}} -x+1 = 1$.

En effet, $\forall x \in \mathbb{R}$, $\sqrt{x^2} = |x|$

$\lim_{x\to 0} f(x) = 1$

Donc f est continue en 0.

Enfin, f est continue sur $\mathbb{R}^* \cup \{0\} = \mathbb{R}$.

Dérivabilité

- f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$
  - $x \longmapsto x^2$ dérivable sur $\mathbb{R}$ et s'annule en 0 seulement
  - $x \longmapsto |x|$ dérivable sur $\mathbb{R}$ et s'annule en 0 seulement
  - $\sqrt{\ }$ dérivable sur $]0,+\infty[$
  - $x \longmapsto \sqrt{x^2}$ dérivable sur $\mathbb{R}^*$

et, par opération, f dérivable sur $\mathbb{R}^*$.

Dérivabilité en 0

$T_a(x)$

f dérivable en a si $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a} = \ell \in \mathbb{R}$

et alors, $\ell = f'(a)$.

si $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(a+h) - f(a)}{h} = \ell \in \mathbb{R}$

2 notations équivalentes

$\forall x \in \mathbb{R}^*$

$$T_0(x) = \frac{f(x) - f(0)}{x - 0}$$

1) calculer, simplifier par x si possible...

2) $\lim\limits_{x \to 0} T_0(x)$

$$T_0(x) = \frac{\frac{x^2 + \sqrt{x^2}}{|x|} - 1}{x}$$

Si $x > 0$, $T_0(x) = \dfrac{\frac{x^2 + x}{x} - 1}{x} = \dfrac{x + 1 - 1}{x} = \dfrac{x}{x} = 1.$

$\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} T_0(x) = 1.$

Si $x < 0$, $T_0(x) = \dfrac{\frac{x^2 - x}{-x} - 1}{x} = \dfrac{-x + 1 - 1}{x} = \dfrac{-x}{x} = -1.$

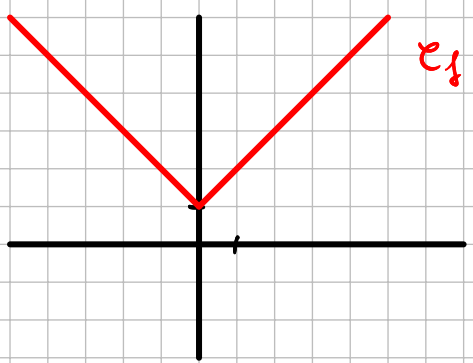
$\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ <}} T_0(x) = -1.$

Donc T_0 n'a pas de limite en 0 mais il a une limite à gauche (-1) et une limite à droite (1). f dérivable à droite en 0.

f dérivable à gauche en 0.

Pour calculer la dérivée sur $\mathbb{R}^*$, on prend les expressions simplifiées :

$$f(x) = \begin{cases} -x + 1 & \text{si } x < 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \\ x + 1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$



Donc $f'(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x < 0 \\ 1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$

2. $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

$D_f = \mathbb{R}$. Sur $\mathbb{R}^*$, f est la composée et le produit de fonctions continues et dérivables donc f y est continue et dérivable.

Point incertain en 0.

Continuité $\lim_{x \to 0} f(x) = ?$

$\forall t \in \mathbb{R}$ $\quad -1 \leq \sin t \leq 1$ donc

$\forall x \in \mathbb{R}^*$ $\quad -1 \leq \sin\left(\frac{1}{x}\right) \leq 1$

et $\quad -x^2 \leq x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) \leq x^2$

$\lim_{x \to 0} x^2 = 0$ donc, d'après le th. de l'encadrement, $\lim_{x \to 0} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0$.

aussi $\lim_{x \to 0} f(x) = f(0)$ et f continue en 0 puis sur $\mathbb{R}$.

Dérivabilité

$\forall x \in \mathbb{R}^*$, $T_0(x) = \dfrac{f(x) - f(0)}{x} = \dfrac{x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right)}{x} = x \sin\left(\frac{1}{x}\right)$

On a encore, $\forall x \in \mathbb{R}^*$ $\quad -x \leq x \sin\left(\frac{1}{x}\right) \leq x$ et $\lim_{x \to 0} x = 0$

Th de l'encadrement, $\lim_{x \to 0} T_0 = 0$.

et f dérivable en 0 avec $f'(0) = 0$

f dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$$f'(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0 \\ 2x \sin\left(\frac{1}{x}\right) + x^2 \cdot \left(\frac{-1}{x^2}\right) \cdot \cos\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \end{cases}$$

$$f'(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0 \\ 2x \sin\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \end{cases}$$

$\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$

$(\sin u)' = u' \cos u$

$(x^2)' = 2x$

$(uv)' = u'v + uv'$

Exercice 3.8. Déterminer le réel a de sorte que la fonction f définie par l'expression suivante soit continue sur $\mathbb{R}$:

$$f(x) = \begin{cases} x \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x < 0 \\ a & \text{si } x = 0 \\ \frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x} & \text{si } 0 < x. \end{cases}$$

La fonction f est-elle alors dérivable sur $\mathbb{R}$? On calculera $f'(x)$ au point x où f est dérivable.

1) Continuité ... $f(0) = a$ donc on cherche $\lim_{\substack{x\to 0 \\ <}} f(x)$ et $\lim_{\substack{x\to 0 \\ >}} f(x)$ ⚠ $x<0$

Si $x<0$, $f(x) = x\sin\left(\frac{1}{x}\right)$ et $\forall t \in \mathbb{R}, -1 \le \sin t \le 1$ $\Rightarrow$ $+x \le f(x) \le -x$ et $\lim_{x\to 0} x = 0$ } Th de l'encadrement

donc $\lim_{\substack{x\to 0 \\ <}} f(x) = 0$

Si $x>0$, $f(x) = \frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x}$ $\lim_{\substack{x\to 0 \\ >}} f(0)$ FI $\frac{0}{0}$

→ transformer : quantité conjuguée

$$\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x} = \frac{\left(\sqrt{1+x^2}-1\right)\left(\sqrt{1+x^2}+1\right)}{x\left(\sqrt{1+x^2}+1\right)} = \frac{1+x^2-1}{x\left(\sqrt{1+x^2}+1\right)} = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}+1}.$$

↑ doit se simplifier sinon faute grave

$\lim_{\substack{x\to 0 \\ >}} f(x) = \lim_{\substack{x\to 0 \\ >}} \frac{x}{\sqrt{1+x^2}+1} = 0$.

En posant $a = 0$, on a $\lim_{x\to 0} f(x) = f(0)$ et f continue en 0

Sur $]0,+\infty[$, $f(x) = \frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x}$ composé et quotient de fonctions continues et f continue.

Sur $]-\infty,0[$, $f(x) = x\sin\left(\frac{1}{x}\right)$ composée et produit de fonctions continues et f continue.

CCL f continue sur $\mathbb{R}$.

Dérivabilité

- Sur $]-\infty;0[$, $f(x) = x \sin\left(\frac{1}{x}\right)$.

  donc $f'(x) = 1 \sin\left(\frac{1}{x}\right) + x \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) \cdot \cos\left(\frac{1}{x}\right)$

  $f'(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x}\cos\left(\frac{1}{x}\right)$

  f est dérivable sur $]-\infty;0[$ comme produit et composée de fonctions dérivables.

- Sur $]0;+\infty[$, $f(x) = \dfrac{\sqrt{1+x^2} - 1}{x}$

  quotient et composée de fonctions dérivables donc dérivable sur $]0;+\infty[$

  $(\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$ $\qquad$ $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$

$$f'(x) = \frac{\frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}\, x - \left(\sqrt{1+x^2} - 1\right) \cdot 1}{x^2} = \frac{\frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}} - \sqrt{1+x^2} + 1}{x^2}$$

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} + \frac{1 - \sqrt{1+x^2}}{x^2}.$$

- En 0 ...

  $\forall x \neq 0$, $T_0(x) = \dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0}$

Si $x < 0$, $T_0(x) = \dfrac{x \sin\left(\frac{1}{x}\right)}{x} = \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ qui n'a pas de limite en 0

f n'est pas dérivable en 0.

