

Exercice 3.5. Soit $n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$ et f_n la fonction définie sur $[1, +\infty[$ par $f_n(x) = x^n - x - 1$.

1. Vérifier que f_n est strictement croissante sur $[1, +\infty[$.
2. Montrer qu'il existe un unique $x_n \in]1, +\infty[$ tel que $f_n(x_n) = 0$.
3. Montrer que $f_{n+1}(x_n) > 0$.
4. En déduire que la suite (x_n) est décroissante et qu'elle converge vers une limite ℓ .
5. On suppose que $\ell > 1$, calculer la limite de x_n^n lorsque n tend vers $+\infty$.
6. En déduire la limite de la suite (x_n) .

1) En utilisant la dérivée... (Autre approche : $f_n(b) - f_n(a)$ se factorise par $b-a$)

$\forall x \geq 1, \forall n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$, polynôme dérivable sur $[1, +\infty[$

$$f_n(x) = x^n - x - 1 \quad \text{or } x \geq 1 \text{ et } n \geq 1$$

$$f_n'(x) = n x^{n-1} - 1 \quad \text{donc } x^{n-1} > 1$$

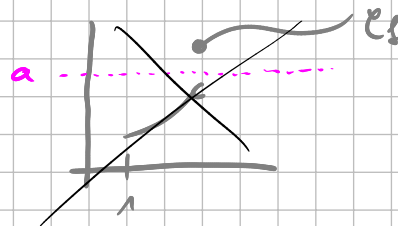
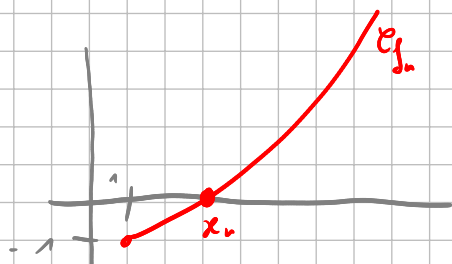
$$\text{et } f_n'(x) > 0, \forall x \geq 1.$$

f_n st. $\nearrow$ sur $[1, +\infty[$.

2) TVI : f_n continue sur $[1, +\infty[$ (polynôme)



INDISPENSABLE pour le TVI.



CEX si f discontinue...

2. f_n st. $\nearrow$ sur $[1, +\infty[$

$$3. f_n(1) = 1^n - 1 - 1 = -1 < 0$$

$$4. \lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^n - x - 1 = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^n = +\infty > 0$$

$\uparrow$
polynôme

Donc, d'après le corollaire du Théorème des valeurs intermédiaires.

$f_n(x) = 0$ admet une unique solution dans $]1, +\infty[$.

3. Mg $f_{n+1}(x_n) > 0 \quad \forall n \geq 2$.

On sait que $\forall n \geq 2, f_n(x_n) = 0, f_{n+1}(x_{n+1}) = 0$

$$\forall n \geq 2, f_{n+1}(x_n) = x_n^{n+1} - x_n - 1 \quad \text{or } f_n(x_n) = x_n^n - x_n - 1 = 0$$

donc $f_{n+1}(x_n) - f_n(x_n) = x_n^{n+1} - x_n^n = x_n^n [x_n - 1]$

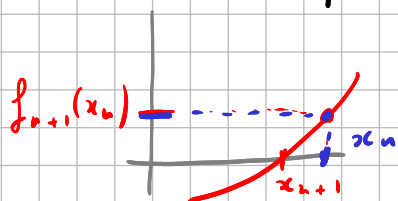
or $x_n > 1$ donc $x_n^n [x_n - 1] > 0$

et $f_{n+1}(x_n) > 0$, $\forall n \geq 2$

4. a) Dq $(x_n) \searrow$

Mq $x_{n+1} \leq x_n$, $\forall n \geq 2$.

On sait que $f_{n+1}(x_{n+1}) = 0$ et $f_{n+1}(x_n) > 0$
et que (f_{n+1}) st $\nearrow$ sur $[1; +\infty[$



Donc $x_n > x_{n+1}$

et $(x_n)_{n \geq 2}$ est décroissante

b) CV de (x_n) ?

Th de CV monotone : • $(x_n)_{n \geq 2}$ décroissant Q 4.a)

• $(x_n)_{n \geq 2}$ minorée par 1 Q.2

Donc $(x_n)_{n \geq 2}$ CV vers $l \geq 1$.

5. Supposons $l > 1$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n^n = ?$

Déf de x_n ?

$l = \lim_{n \rightarrow +\infty} x_n$

$f_n(x_n) = 0$

$(\Leftrightarrow) x_n^n - x_n - 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x_n^n = x_n + 1$
isoler x_n^n

$\Rightarrow$

passage à la limite

dans l'égalité

$\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n^n = \lim_{n \rightarrow +\infty} x_n + 1 = l + 1$

Résumé

Si $l > 1$ alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n^n = l + 1 > 2$

6) Dq $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = ?$

$$\ln(x_n^n) = n \ln(x_n) \quad \text{et} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} (x_n) = l > 1$$

Supposons toujours $l > 1$, alors, $\ln(l) > 0$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} n \ln(x_n) = \text{"} +\infty \times \ln(l) \text{"} = +\infty$$

opérations

$$\text{Donc} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \ln(x_n^n) = +\infty \quad \xrightarrow{\text{exp}} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \exp(\ln(x_n^n)) = e^{+\infty} = +\infty$$

x_n^n

$$\text{et} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} x_n^n = +\infty$$

$$\text{or, Q5: Si } l > 1, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} x_n^n = l + 1 \in \mathbb{R}$$

← contradiction
←

Ceci contredit l'hypothèse $l > 1$.

$$\text{Aussi} \quad l \leq 1.$$

$$\text{mais Q4) } \Rightarrow l \geq 1$$

$$\left. \begin{array}{l} l \leq 1 \\ l \geq 1 \end{array} \right\} \text{ donc } l = 1.$$

Exercice 3.6. Déterminer les domaines de définition et de dérivabilité de la fonction réelle f et calculer la dérivée f' dans les cas suivants :

1. $f(x) = \frac{1+x}{1-x}$

2. $f(x) = \sqrt{1+2x^3}$

3. $f(x) = \frac{\sin x}{1+\cos x}$

4. $f(x) = \frac{x}{1+x^2}$

5. $f(x) = \frac{1}{(1+x^2)^2}$

6. $f(x) = \sqrt{2\sin(x) - 1}$

7. $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$

8. $f(x) = \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$

9. $f(x) = \frac{1}{1-2\cos(x)}$

1. $f(x) = \frac{1+x}{1-x}$ f est rationnelle (Quotient de polynômes)

f est définie et dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$

$\Leftrightarrow \mathcal{D}_f = \mathcal{D}_{f'} = \mathbb{R} \setminus \{1\}$

$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$

$f'(x) = \frac{1-x + (1+x)}{(1-x)^2} = \frac{2}{(1-x)^2}$

2. $f(x) = \sqrt{1+2x^3} = (1+2x^3)^{\frac{1}{2}}$

$(u^n)' = n u' u^{n-1}$
si $n \neq -1$.
qd $u > 0$

$\mathcal{D}_f = \{x \in \mathbb{R}, 1+2x^3 \geq 0\}$

$\forall x \in \mathbb{R}, 1+2x^3 \geq 0 \Leftrightarrow x^3 \geq -\frac{1}{2} \Leftrightarrow x \geq -\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{3}} = -\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$
 $x \mapsto x^3$ st / sur $\mathbb{R}$

$\mathcal{D}_f = \left[-\frac{1}{\sqrt[3]{2}}; +\infty\right[$

$\mathcal{D}_{f'} = \left]-\frac{1}{\sqrt[3]{2}}; +\infty\right[$

$f'(x) = \frac{1}{2} \cdot 6x^2 \cdot (1+2x^3)^{-\frac{1}{2}}$
 $f'(x) = \frac{3x^2}{\sqrt{1+2x^3}}$

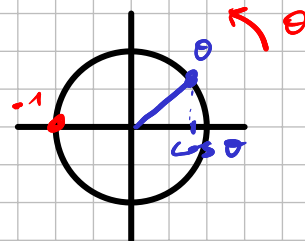
3. $f(x) = \frac{\sin x}{1+\cos x}$ $\sin$ et $\cos$ définies et dérivables sur $\mathbb{R}$

$\forall x \in \mathbb{R} \quad 1+\cos x = 0 \Leftrightarrow \cos x = -1$

$\Leftrightarrow x = \pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$

$\Leftrightarrow x \equiv \pi [2\pi]$

$\mathcal{D}_f = \mathcal{D}_{f'} = \mathbb{R} \setminus \{\pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$



$(\sin)' = \cos$

$(\cos)' = -\sin$

$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$

$\forall x \in \mathbb{R}, \cos^2 x + \sin^2 x = 1$

$f'(x) = \frac{\cos x (1+\cos x) + \sin^2 x}{(1+\cos x)^2}$

$f'(x) = \frac{\cos^2 x + \cos x + \sin^2 x}{(1+\cos x)^2} = \frac{1+\cos x}{(1+\cos x)^2} = \frac{1}{1+\cos x}$

4. $f(x) = \frac{x}{1+x^2}$ f rationnelle. $\forall x \in \mathbb{R}, 1+x^2 > 0$
 donc $\mathcal{D}_f = \mathcal{D}_{f'} = \mathbb{R}$

$$f'(x) = \frac{(1+x^2) - x \cdot 2x}{(1+x^2)^2} = \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}$$

5. $f(x) = \frac{1}{(1+x^2)^2}$ f rationnelle, $\forall x \in \mathbb{R}, 1+x^2 > 0$
 $\mathcal{D}_f = \mathcal{D}_{f'} = \mathbb{R}$.

$$f(x) = (1+x^2)^{-2} \quad (u^n)' = n u' u^{n-1}, \quad n \neq -1$$

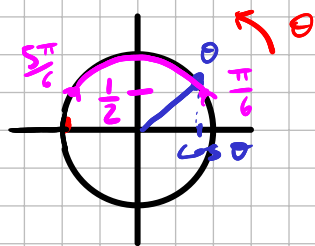
$$f'(x) = -2 \cdot 2x \cdot (1+x^2)^{-3} = \frac{-4x}{(1+x^2)^3} \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

6. $f(x) = \sqrt{2 \sin(x) - 1}$

$$\mathcal{D}_f = \{x \in \mathbb{R}, 2 \sin(x) - 1 \geq 0\}$$

or, $\sin$ dérivable sur $\mathbb{R} \Rightarrow \mathcal{D}_{f'} = \{x \in \mathbb{R}, 2 \sin(x) - 1 > 0\}$
 $\sqrt{\quad}$ dérivable sur $]0; +\infty[$

$$\forall x \in \mathbb{R}, 2 \sin x - 1 \geq 0 \Leftrightarrow \sin x \geq \frac{1}{2}$$



or $\sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$ et $\sin \frac{5\pi}{6} = \frac{1}{2}$ et $\sin$ 2π -périodique

$$\Leftrightarrow x \in \left[\frac{\pi}{6} + 2k\pi; \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \right], k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow x \in \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left[\frac{\pi}{6} + 2k\pi, \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \right]$$

$$\mathcal{D}_f = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left[\frac{\pi}{6} + 2k\pi, \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \right] \text{ et } \mathcal{D}_{f'} = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left] \frac{\pi}{6} + 2k\pi, \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \right[$$

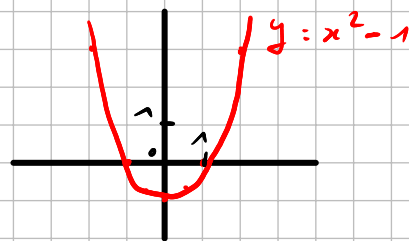
$$\forall x \in \mathcal{D}_f \quad f(x) = \sqrt{2 \sin x - 1} = (2 \sin x - 1)^{\frac{1}{2}}$$

$$\forall x \in \mathcal{D}_{f'}, \quad f'(x) = \frac{1}{2} \cdot 2 \cos x \cdot (2 \sin x - 1)^{-\frac{1}{2}}$$

$$f'(x) = \frac{\cos x}{\sqrt{2 \sin x - 1}}$$

$$7. \quad f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad x^2-1 > 0 \Leftrightarrow x > 1 \text{ ou } x < -1$$



$$\text{Donc } \mathcal{D}_f =]-\infty; -1[\cup]1; +\infty[$$

$$\sqrt{\text{dérivable sur }]0; +\infty[} \text{ donc } \mathcal{D}_{f'} = \mathcal{D}_f =]-\infty; -1[\cup]1; +\infty[$$

$$\forall x \in \mathcal{D}_f, \quad f(x) = (x^2-1)^{-\frac{1}{2}}, \quad f'(x) = -\frac{1}{2} \cdot 2x \cdot (x^2-1)^{-\frac{3}{2}}$$

$$f'(x) = \frac{-x}{(x^2-1)^{\frac{3}{2}}} = \frac{-x}{(x^2-1)\sqrt{x^2-1}}$$

$$8. \quad f(x) = \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} \quad \mathcal{D}_f = \left\{ x \in \mathbb{R}, 1-x \neq 0 \text{ et } \frac{1+x}{1-x} \geq 0 \right\}$$

x	$-\infty$	-1	$+1$	$+\infty$
$1+x$	-	0	+	+
$1-x$	+	+	0	-
$\frac{1+x}{1-x}$	-	0	+	-

$$\mathcal{D}_f = [-1; 1[$$

$$\sqrt{\text{dérivable sur }]0; +\infty[}$$

$$\mathcal{D}_{f'} =]-1; 1[$$

$$\forall x \in]-1; 1[, \quad f(x) = \left(\frac{1+x}{1-x} \right)^{\frac{1}{2}}$$

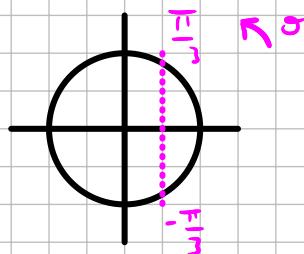
$$f'(x) = \frac{1}{2} \left(\frac{1+x}{1-x} \right)' \left(\frac{1+x}{1-x} \right)^{-\frac{1}{2}}$$

$$Q1. \quad f'(x) = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{(1-x)^2} \cdot \left(\frac{1-x}{1+x} \right)^{-\frac{1}{2}}$$

$$f'(x) = \frac{1}{(1-x)^2} \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} = \frac{1}{(1-x)^{\frac{3}{2}} (1+x)^{\frac{1}{2}}}$$

9. $f(x) = \frac{1}{1-2\cos x}$

$\mathcal{D}_f = \left\{ x \in \mathbb{R}, \cos x \neq \frac{1}{2} \right\}$



$\forall x \in \mathbb{R}, \cos x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \text{ ou } x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$

$\mathcal{D}_f = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{3} + 2k\pi, -\frac{\pi}{3} + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$

$\cos$ dérivable sur $\mathbb{R}$ et $(\cos)' = -\sin$ et $\left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{u'}{u^2}$

$\mathcal{D}_{f'} = \mathcal{D}_f$.

$\forall x \in \mathcal{D}_{f'},$

$f'(x) = \frac{-2 \sin x}{(1-2\cos x)^2}$

9. pb avec ma dérivée

$u = 1 - 2\cos x$

$u' = 2 \sin x$