

Exercice 3.3. On rappelle que $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$.

1. Montrer que $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$.

2. Calculer les limites suivantes :

(a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(2x)}{\sin(3x)}$

(b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin(x) - \sin(2x)}{x^3}$

(c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \sin(x)}{1 - \cos(x)}$

(d) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} \sin\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$.

1) déjà fait jeudi dernier

2) a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(2x)}{\sin(3x)}$

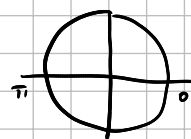
FI $\frac{0}{0}$

On a $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{t} = 1$
et $\lim_{x \rightarrow 0} 2x = 0$

} Th de composition

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(2x)}{2x} = 1$

de même $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(3x)}{3x} = 1$.



$\forall x \in]-\frac{\pi}{3}; 0[\cup]0; \frac{\pi}{3}[$, $\frac{\sin(2x)}{\sin(3x)} = \frac{2}{3} \times \frac{\sin(2x)}{2x} \times \frac{3x}{\sin(3x)}$

donc $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{\sin 3x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2}{3} \times \frac{\sin(2x)}{2x} \times \frac{3x}{\sin(3x)} = \frac{2}{3} \times 1 \times \frac{1}{1} = \frac{2}{3} \cdot \square$

2. b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin(x) - \sin(2x)}{x^3}$

FI $\frac{0}{0}$

Formule d'addition : $\forall x \in \mathbb{R} \quad \sin(2x) = 2 \sin(x) \cos(x)$

$\forall x \neq 0$, $\frac{2 \sin(x) - \sin(2x)}{x^3} = \frac{2 \sin x - 2 \sin x \cos x}{x^3}$
 $= 2 \frac{\sin x}{x} \times \frac{1 - \cos x}{x^2}$

or, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ et $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$ donc, par produit,

$\lim_{x \rightarrow 0} 2 \cdot \frac{\sin x}{x} \times \frac{1 - \cos x}{x^2} = 2 \times 1 \times \frac{1}{2} = 1 \quad \square$

$$2.c) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \sin(x)}{1 - \cos(x)} \quad \text{FI } \frac{0}{0}$$

On sait que $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ et $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$

et, $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$

$$\frac{x \sin x}{1 - \cos x} = \frac{\sin x}{x} \times \frac{x^2}{1 - \cos x}$$

donc, par opération

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \sin x}{1 - \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \times \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{1 - \cos x} = 1 \times \frac{1}{2} = 2 \quad \square$$

$$2.d) \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} \sin\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right) \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} = +\infty \quad \text{FI } \infty \times 0$$

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{t} = 1$$

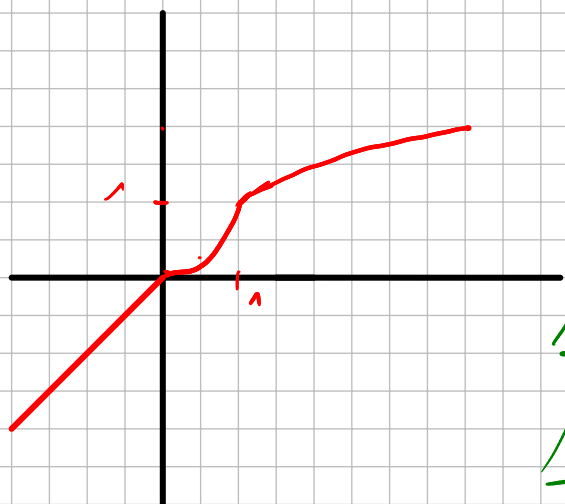
$\forall x > 0$, $\sqrt{x} \sin\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right) = \frac{\sin\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)}{\frac{1}{\sqrt{x}}}$ or $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} = 0$

Th de composition, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} \sin \frac{1}{\sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)}{\frac{1}{\sqrt{x}}} = 1 \quad \square$

Exercice 3.4. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x < 0 \\ x^2 & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ \sqrt{x} & \text{si } 1 < x. \end{cases}$$

1. La fonction f est-elle continue ?
2. Montrer que f est bijective et déterminer f^{-1} .
3. Tracer les graphes de f et de f^{-1} dans un même repère orthonormé.



1) Il semble que f soit continue sur $\mathbb{R}$

• sur $] -\infty ; 0[$, $f(x) = x$.

Polynôme donc continue sur $] -\infty ; 0[$.



• sur $] 0 ; 1[$, $f(x) = x^2$

Polynôme donc continue sur $] 0 ; 1[$



• sur $] 1 ; +\infty[$, $f(x) = \sqrt{x}$

qui est continue sur $] 1 ; +\infty[$.

Il reste à étudier la continuité en 0 et 1.

• En 0, f est continue si $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0)$

diff

on ... $f(0) = 0^2 = 0$.

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \xrightarrow{<} 0} f(x) &= \lim_{x \xrightarrow{<} 0} x = 0 \\ \lim_{x \xrightarrow{>} 0} f(x) &= \lim_{x \xrightarrow{>} 0} x^2 = 0 \end{aligned} \right\} \begin{aligned} &\text{égales!} \\ &\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0 = f(0) \end{aligned}$$

et f continue en 0.

• En 1, $f(1) = 1^2 = 1$

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \xrightarrow{<} 1} f(x) &= \lim_{x \xrightarrow{<} 1} x^2 = 1 \\ \lim_{x \xrightarrow{>} 1} f(x) &= \lim_{x \xrightarrow{>} 1} \sqrt{x} = \sqrt{1} = 1 \end{aligned} \right\} \begin{aligned} &\text{égalité} \\ &\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 1 = f(1) \end{aligned}$$

Donc f est continue en 1.

CC1 f est continue sur $] -\infty ; 0[\cup \{0\} \cup] 0 ; 1[\cup \{1\} \cup] 1 ; +\infty[= \mathbb{R}$.

2. $M_g f$ bij + $f^{-1} = ?$

Définition 3.14 (Définition de la bijection et réciproque)

Une fonction f est une bijection de I sur J si et seulement si, pour tout $y \in J$, l'équation $f(x) = y$ admet une unique solution x dans I .

Dans ce cas, la fonction $f^{-1} : J \rightarrow I$, qui associe à chaque $y \in J$ cette unique solution, est appelée **fonction réciproque** de f . Elle est caractérisée par :

$$\forall x \in I, f^{-1}(f(x)) = x \text{ et } \forall y \in J, f(f^{-1}(y)) = y$$

Autrement dit : $\forall x \in I, \forall y \in J, y = f(x) \iff x = f^{-1}(y)$.

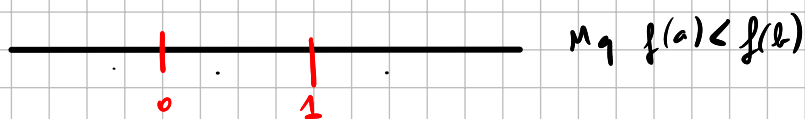
Le résultat fondamental suivant sera appliqué à de nombreuses reprises dans ce cours.

Théorème 3.10 (Théorème de la bijection)

Soit f une fonction définie, continue et **strictement monotone** sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. Alors :

1. L'ensemble image $J = f(I)$ est un intervalle de $\mathbb{R}$ et f réalise une bijection de I sur J .
2. La fonction réciproque $f^{-1} : J \rightarrow I$ est continue sur J .
3. f^{-1} est strictement monotone sur J et possède le **même sens de variation** que f .

soit $(a; b) \in \mathbb{R}^2$ avec $a < b$



si a et b figurent dans le même des 3 intervalles $]-\infty; 0[, [0; 1],]1; +\infty[$, c'est déjà fait

si $a < 0 \leq b$ Alors $f(a) = a < 0 \leq b^2 = f(b)$

si $a \leq 1 < b$ Alors $f(a) = a^2 \leq 1 < \sqrt{b} = f(b)$.

On a toujours $f(a) < f(b)$

Th bijection

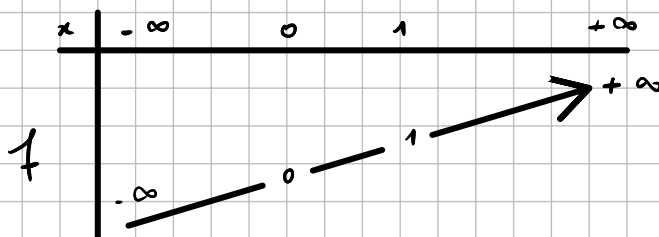
f est continue et st $\nearrow$ sur $\mathbb{R}$

donc bijective de $\mathbb{R} \rightarrow f(\mathbb{R})$ (à déterminer...)

$f(\mathbb{R}) = ?$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} = +\infty$$



$f(\mathbb{R}) =]-\infty; +\infty[$

f bijective de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

f continue sur $\mathbb{R}$

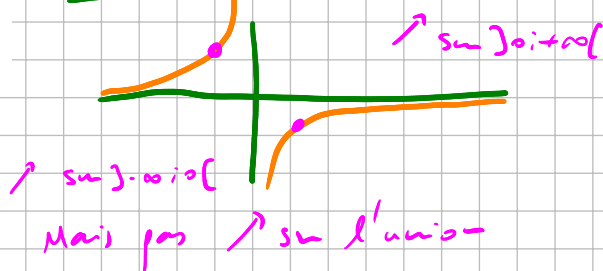
$M_g f$ st $\nearrow$ sur $\mathbb{R}$

sur $]-\infty; 0[, f$ st $\nearrow$.

sur $[0; 1], f$ st $\nearrow$.

sur $]1; +\infty[, f$ st $\nearrow$

! par forcément sur l'union



$$f^{-1}(y) = ?$$

$$\forall x \in \mathbb{R}^I, \forall y \in \mathbb{R}^J, f(x) = y \Leftrightarrow f^{-1}(y) = x$$

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x < 0 \\ x^2 & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ \sqrt{x} & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

$$\bullet \text{ si } x < 0, f(x) = y \Leftrightarrow x = y \Leftrightarrow y = x$$

$$f^{-1}(y) = y \text{ si } y < 0$$

$$\bullet \text{ si } 0 \leq x \leq 1, f(x) = y \Leftrightarrow x^2 = y$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{y} = x$$

$$f^{-1}(y) = \sqrt{y} \text{ si } 0 \leq y \leq 1$$

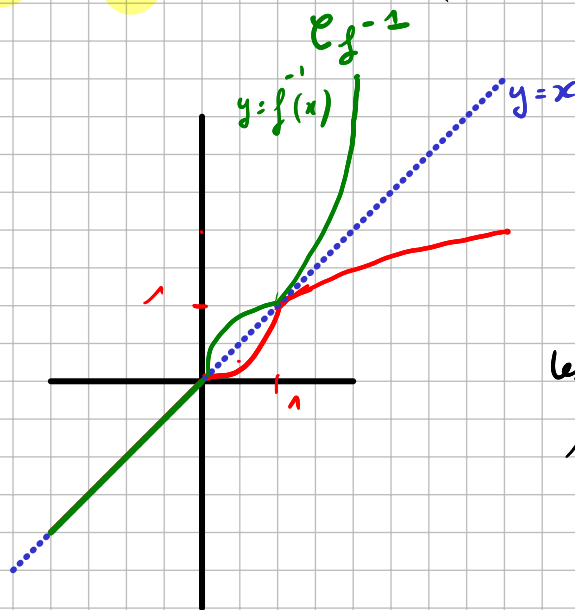
$$\bullet \text{ si } x > 1, f(x) = y \Leftrightarrow \sqrt{x} = y$$

$$\Leftrightarrow y^2 = x$$

$$f^{-1}(y) = y^2 \text{ si } y > 1$$

$$f^{-1}(y) = \begin{cases} y & \text{si } y < 0 \\ \sqrt{y} & \text{si } 0 \leq y \leq 1 \\ y^2 & \text{si } y > 1 \end{cases}$$

3.



les courbes de f et f^{-1}
sont symétriques / $y = x$.