

MIASH

Vision du 15/10/2020

Début 10h15

Partie 3 : Fonctions réelles (4 semaines)

Futures visions
annoncées sur

<https://gkzk.xyz>

Exercice 3.1. En justifiant les calculs, déterminer, lorsqu'elles existent, les limites suivantes :

$$1. \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 + 1}{x + 1}$$

$$2. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - \sqrt{x}}{x - 1}$$

$$3. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 1}$$

$$4. \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x - 4}{\sqrt{x} - 2}$$

$$5. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1 - x}{x^2 - 4}$$

$$6. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - 1}{x}$$



limite en $a \in \mathbb{R}$ donc pas de th de comparaison

$$\text{à l' } \infty \dots \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3}{x^2 - 5} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$$

INVALIDE qd $x \rightarrow a \in \mathbb{R}$.

$$1. \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 + 1}{x + 1}$$

$$(-1)^3 + 1 = -1 + 1 = 0$$
$$-1 + 1 = 0$$

$x^3 + 1$ s'annule en -1 .

$$\text{FI } \frac{0}{0}$$

se résout (souvent...) en factorisant

$P(x) = x^3 + 1$ polynôme s'annulant en -1

$\rightarrow x + 1$ factorise $x^3 + 1$.

Méthodes: identification, division euclidienne, Horner...

toutes sont valides.

$$\begin{array}{r} 7 \\ -6 \\ \hline 1 \end{array}$$

$$7 = 2 \times 3 + 1.$$

division euclidienne de polynômes

$$\begin{array}{r} x^3 + 1 \\ \ominus x^3 + x^2 \\ \hline -x^2 + 1 \end{array}$$

$$\ominus -x^2 - x$$

$$\begin{array}{r} x + 1 \\ \ominus x + 1 \\ \hline 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} x+1 \\ \hline x^2 - x + 1 \end{array}$$

$$x^2(x+1) = x^3 + x^2$$

$$-x(x+1) = -x^2 - x$$

$$\text{Donc } x^3 + 1 = (x+1)(x^2 - x + 1)$$

$$\text{en effet: } = x^3 - x^2 + x + x^2 - x + 1$$

$$= x^3 + 1$$



Donc, $\forall x \neq -1$,

$$\frac{x^3 + 1}{x + 1} = \frac{(x+1)(x^2 - x + 1)}{x + 1} = x^2 - x + 1.$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 + 1}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow -1} \underbrace{x^2 - x + 1}_{\substack{\text{polynôme} \\ \text{donc continue} \\ \text{en } -1}} = (-1)^2 + 1 + 1 = 3. \quad \square$$

⚠️ merci!

2. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - \sqrt{x}}{x - 1}$
 $\left. \begin{array}{l} 1 - \sqrt{1} = 0 \\ 1 - 1 = 0 \end{array} \right\} \text{FI } \frac{0}{0}$

⚠️ pas un polynôme...

$$\forall x \geq 0, \quad x - \sqrt{x} = \sqrt{x}(\sqrt{x} - 1)$$

$$\forall x \geq 0, \quad x - 1 = (\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} + 1)$$

$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$

$$\sqrt{x}^2 = x, \quad \forall x \geq 0$$

$$\forall x \geq 0, x \neq 1, \quad \frac{x - \sqrt{x}}{x - 1} = \frac{\cancel{\sqrt{x}}(\sqrt{x} - 1)}{(\sqrt{x} + 1)(\cancel{\sqrt{x} - 1})} = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} + 1}$$

$$\text{Donc } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - \sqrt{x}}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} + 1} = \frac{1}{1 + 1} = \frac{1}{2}.$$

Q? et pour les $x \leq 0$?

$$f(x) = \frac{x - \sqrt{x}}{x - 1}; \quad \mathcal{D}_f = [0; 1[\cup]1; +\infty[$$

3. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 1}$

Numerator & denominator
s'annulent en 1.

Donc ... ils se factorisent par $x - 1$

$$x^2 - 3x + 2 = (x - 1)(x - 2)$$

$$\Delta = \dots \text{ ou autre}$$

$$x^2 - 1 = (x - 1)(x + 1)$$

$$\text{donc } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\cancel{(x - 1)}(x - 2)}{\cancel{(x - 1)}(x + 1)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - 2}{x + 1} = \frac{1 - 2}{1 + 1} = -\frac{1}{2}.$$

4. $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x - 4}{\sqrt{x} - 2}$

$$\text{FI } \frac{0}{0}$$

$$\forall x \geq 0, \quad x - 4 = (\sqrt{x} - 2)(\sqrt{x} + 2)$$

$$\text{Donc } \frac{x - 4}{\sqrt{x} - 2} = \frac{(\cancel{\sqrt{x} - 2})(\sqrt{x} + 2)}{\cancel{\sqrt{x} - 2}} = \sqrt{x} + 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x - 4}{\sqrt{x} - 2} = \lim_{x \rightarrow 4} \sqrt{x} + 2 = \sqrt{4} + 2 = 4.$$

$$5. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1-x}{x^2-4}$$

⚠ pas FI $\frac{0}{0}$

FI $\frac{-1}{0}$ plr de signe !

Se résout (souvent...) par une étude de signe.

$$f(x) = \frac{1-x}{x^2-4} = \frac{1-x}{(x-2)(x+2)}$$

$$\mathcal{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{-2; 2\}$$

seule ligne intervenant

x	$-\infty$	-2	1	2	$+\infty$
$1-x$	+	+	0	-	-
$x-2$	-	-	-	0	+
$x+2$	-	0	+	+	+
$\frac{1-x}{(x-2)(x+2)}$	+		-	0	+

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{1-x}{(x-2)(x+2)} = \frac{-1}{0^- \times 4} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{1-x}{(x-2)(x+2)} = \frac{-1}{0^+ \times 4} = -\infty$$

f n'a pas de limite en 2 car ses limites à gauche et à droite sont $\neq$.

$$6. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - 1}{x}$$

FI $\frac{0}{0}$

$$\forall a \geq 0, b \geq 0, (\sqrt{a} - \sqrt{b})(\sqrt{a} + \sqrt{b}) = a - b \dots$$

Quantité conjuguée

$$\forall x \geq -1, x \neq 0, \frac{\sqrt{1+x} - 1}{x} = \frac{(\sqrt{1+x} - 1)(\sqrt{1+x} + 1)}{x(\sqrt{1+x} + 1)} = \frac{1+x-1}{x(\sqrt{1+x} + 1)}$$

$$= \frac{\cancel{x}}{\cancel{x}(\sqrt{1+x} + 1)}$$

sa doit se simplifier...

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{1+x} + 1} = \frac{1}{\sqrt{1} + 1} = \frac{1}{2}$$

Exercice 3.2. En justifiant les calculs, déterminer, lorsqu'elles existent, les limites suivantes :

$$1. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \cos(1+x^2)}{1+x^2}$$

$$2. \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^3 + x^2}{x^2 - 1} - x \right)$$

$$3. \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (\sqrt{x^2 + x} - x)$$

$$4. \lim_{x \rightarrow +\infty} \cos\left(\frac{\pi x - 1}{2x + 1}\right).$$

1) $\cos ? \quad \forall t \in \mathbb{R} \quad -1 \leq \cos t \leq 1$

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad -1 \leq \cos(1+x^2) \leq 1$$

Donc, $\forall x \in \mathbb{R} \quad -\frac{1}{1+x^2} \leq \frac{\cos(1+x^2)}{1+x^2} \leq \frac{1}{1+x^2}$

Donc, $\forall x > 0 \quad \frac{-x}{1+x^2} \leq \frac{x \cos(1+x^2)}{1+x^2} \leq \frac{x}{1+x^2}$

$x > 0$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{1+x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0.$$

↑ fonction rationnelle

Th de l'encadrement, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \cos(1+x^2)}{1+x^2} = 0$

$$2. l = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^3 + x^2}{x^2 - 1} - x \right)$$

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1; 1\}, \quad \frac{x^3 + x^2}{x^2 - 1} - x = \frac{x^3 + x^2 - x(x^2 - 1)}{x^2 - 1} = \frac{x^3 + x^2 - x^3 + x}{x^2 - 1} = \frac{x^2 + x}{x^2 - 1}$$

Donc $l = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + x}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} 1 = 1$

fonction rationnelle

$$3. \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (\underbrace{\sqrt{x^2 + x}}_{f(x)} - x)$$

$$\text{en } +\infty : \text{FI } \infty - \infty$$

$$\text{en } -\infty : +\infty + \infty \dots$$

• En $-\infty$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 + x} - x) \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} -x = +\infty \quad \left. \begin{array}{l} \text{par saur} \end{array} \right\}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 + x = +\infty \Rightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{x^2 + x} = +\infty$$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty \end{array} \right\}$$

• en $+\infty$?

Factorisons...

$$f(x) = \frac{-x}{1} = \frac{(\sqrt{x^2+x} - x)(\sqrt{x^2+x} + x)}{\sqrt{x^2+x} + x}$$

$$f(x) = \frac{x^2+x-x^2}{\sqrt{x^2+x} + x} = \frac{x}{\sqrt{x^2+x} + x}$$

FI $\infty \cdot \infty \rightarrow$ FI $\frac{\infty}{\infty} \rightarrow$ par de FI

$$\forall x > 0, \frac{x}{\sqrt{x^2+x} + x} = \frac{\cancel{x}}{\cancel{x} \left(\sqrt{1+\frac{1}{x}} + 1 \right)} = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x}} + 1}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x}} + 1} = \frac{1}{\sqrt{1+0} + 1} = \frac{1}{2}$$

4. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \cos \left(\frac{\pi x - 1}{2x + 1} \right)$

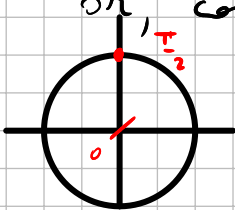
donc le cos : FI $\frac{\infty}{\infty}$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\pi x - 1}{2x + 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\pi x}{2x} = \frac{\pi}{2}$$

$\uparrow$
rationnel

or, cos est continue sur $\mathbb{R}$

$$\text{donc } \lim_{x \rightarrow +\infty} \cos \left(\frac{\pi x - 1}{2x + 1} \right) = \cos \left(\frac{\pi}{2} \right) = 0$$



Exercice 3.3. On rappelle que $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$.

1. Montrer que $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$.

2. Calculer les limites suivantes :

(a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(2x)}{\sin(3x)}$

(b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin(x) - \sin(2x)}{x^3}$

(c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \sin(x)}{1 - \cos(x)}$

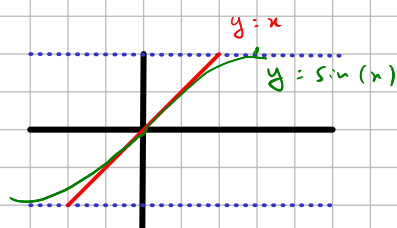
(d) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} \sin\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$.

cos, sin

1) $-1 \leq \cos \leq 1$

$-1 \leq \sin \leq 1$

2) $\cos^2 + \sin^2 = 1$



1) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = ?$

FI $\frac{0}{0}$ car $\cos(0) = 1$.

$\forall x \in \mathbb{R}, \cos^2 x + \sin^2 x = 1$

al-bé ou es-tu ?

$\forall x \neq 0, \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{(1 - \cos x)(1 + \cos x)}{x^2 (1 + \cos x)} = \frac{1 - \cos^2 x}{x^2 (1 + \cos x)}$

Donc, $\forall x \neq 0, \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{\sin^2 x}{x^2 (1 + \cos x)}$

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 = 1^2 = 1$

Donc $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 \cdot \frac{1}{1 + \cos x} = 1^2 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

Hospital



<https://www.bibmath.net/dico/index.php?action=affiche&quoi=.h/hospital.html>

Fredric Bryant

La **règle de l'Hospital** est une méthode pour lever des formes indéterminées du type $0/0$ ou ∞/∞ en utilisant la dérivée des fonctions. En cela, elle préfigure l'utilisation systématique des développements limités.

Proposition : Soit $a, b \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ avec $a < b$, soit $f, g :]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions dérivables telles que g' ne s'annule pas. Soit $\ell \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$.

• Si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$ et si $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \ell$, alors $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \ell$.

• Si $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \pm\infty$ et si $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \ell$, alors $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \ell$.

La suite

mercure: 21

https://qkz6.xcgg

ou
présent: 01