

Exercice 4.1. Simplifier les expressions suivantes, en précisant éventuellement le domaine de validité :

$$1. e^{-2\ln(5)} - e^{-3\ln(5)} \quad 2. 3e^{\ln(x/3)} - 3\ln(e^{x/3}) \quad 3. e^{2\ln|x-1| - 2\ln(x^2-1)}.$$

$$1) e^{-2\ln 5} - e^{-3\ln 5} = 5^{-2} - 5^{-3} = \dots$$

$$2) 3e^{\ln \frac{x}{3}} - 3\ln(e^{\frac{x}{3}}) = 3\frac{x}{3} - 3\frac{x}{3} = 0 \quad \mathcal{D} =]0; +\infty[$$

$$3) e^{2\ln|x-1| - 2\ln(x^2-1)} \quad \mathcal{D} =]-\infty; -1[\cup]1; +\infty[$$

$$= \frac{(x-1)^2}{(x^2-1)^2} = \frac{1}{(x+1)^2}$$

Exercice 4.2. Simplifier les expressions suivantes :

$$1. \arcsin\left(\sin \frac{25\pi}{7}\right)$$

$$2. \arccos\left(\cos \frac{215\pi}{7}\right)$$

$$3. \arctan\left(\tan \frac{74\pi}{9}\right)$$

$$4. \arcsin\left(\cos \frac{53\pi}{5}\right).$$

$$\text{Arcsin} : [-1; 1] \rightarrow \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$$

$$\text{Arccos} : [-1; 1] \rightarrow [0; \pi]$$

$$1. \arcsin\left(\sin \frac{25\pi}{7}\right) = \arcsin\left(\sin -\frac{3\pi}{7}\right) = -\frac{3\pi}{7}$$

$$\frac{25\pi}{7} = -\frac{3\pi}{7} [2\pi] \text{ et } -\frac{3\pi}{7} \in \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$$

$$2) \arccos\left(\cos \frac{215\pi}{7}\right) = \arccos\left(\cos \frac{5\pi}{7}\right) = \frac{5\pi}{7}$$

$$3) \arctan\left(\tan \frac{74\pi}{9}\right) = \arctan\left(\tan \frac{2\pi}{9}\right) = \frac{2\pi}{9}$$

$$4) \arcsin\left(\cos \frac{53\pi}{5}\right) = \arcsin \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{53\pi}{5}\right) = \arcsin \sin\left(-\frac{85\pi}{10}\right)$$

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x \quad = \arcsin \sin\left(-\frac{13\pi}{2}\right)$$

$$= \arcsin \sin \frac{5\pi}{2} = \frac{5\pi}{2}$$

Exercice 4.3. Montrer que

1. $2 \arccos\left(\frac{3}{4}\right) = \arccos\left(\frac{1}{8}\right)$

2. $\arccos\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right) + \arccos\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right) = \frac{\pi}{2}$

3. $2 \arctan\left(\frac{1}{2}\right) = \arctan\left(\frac{4}{3}\right)$

4. $\arcsin\left(\frac{4}{5}\right) + \arcsin\left(\frac{3}{5}\right) = \frac{\pi}{2}$

$$1) \quad 2 \arccos\left(\frac{3}{4}\right) = \arccos\left(\frac{1}{8}\right)$$

$$\arccos\left(\frac{1}{8}\right) \in [0; \pi]$$

$$\cos \arccos\left(\frac{1}{8}\right) = \frac{1}{8}$$

$$\left. \begin{array}{l} \cos 2x = 2 \cos^2 x - 1 \\ \cos\left(2 \arccos \frac{3}{4}\right) = 2 \cos^2 \arccos \frac{3}{4} - 1 \\ = 2 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^2 - 1 = \frac{18 - 16}{16} = \frac{1}{8} \\ \frac{\pi}{4} \leq \frac{3}{4} \leq \frac{\pi}{3} \Rightarrow \arccos \frac{\pi}{4} > \arccos \frac{3}{4} > \arccos \frac{\pi}{3} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} > \arccos \frac{3}{4} > \frac{1}{2} \\ \Rightarrow 1 \leq 2 \arccos \frac{3}{4} \leq \sqrt{2} \\ \Rightarrow 2 \arccos \frac{3}{4} \in [0; \pi] \end{array} \right\}$$

les 2 nombres de $[0; \pi]$ ont le même cos et donc sont égaux

2) $\arccos \frac{1}{\sqrt{5}} + \arccos\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right) = \frac{\pi}{2}$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \arccos \frac{2}{\sqrt{5}}\right) = \sin\left(\arccos \frac{2}{\sqrt{5}}\right) = \sqrt{1 - \left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

prop 4.8

$$\cos \arccos \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}} \quad \arccos \frac{2}{\sqrt{5}} \in [0; \pi] \Rightarrow \frac{\pi}{2} - \arccos \frac{2}{\sqrt{5}} \in [0; \pi]$$

même cos et dans $[0; \pi]$ donc égaux

3) $2 \arctan \frac{1}{2} = \arctan \frac{4}{3}$

$$\tan \frac{\pi}{6} = \frac{1}{\sqrt{3}} \geq \frac{1}{2}$$

$$0 \leq \arctan \frac{1}{2} \leq \frac{\pi}{6}$$

$$\Rightarrow 0 \leq 2 \arctan \frac{1}{2} \leq \frac{\pi}{3}$$

$$\tan 2x = \frac{2 \tan x}{1 - \tan^2 x}$$

$$\tan\left(2 \arctan \frac{1}{2}\right) = \frac{2 \tan \arctan \frac{1}{2}}{1 - \tan^2 \arctan \frac{1}{2}} = \frac{2 \cdot \frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{1}{\frac{3}{4}} = \frac{4}{3}$$

4) $\arcsin \frac{4}{5} + \arcsin \frac{3}{5} = \frac{\pi}{2}$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \arcsin \frac{3}{5}\right) = \cos \arcsin \frac{3}{5} = \sqrt{1 - \left(\frac{3}{5}\right)^2} = \sqrt{\frac{16}{25}} = \frac{4}{5}$$

$$\arcsin \frac{3}{5} \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right] \Rightarrow \frac{\pi}{2} - \arcsin \frac{3}{5} \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$$

1. $\ln\left(\frac{x+3}{2}\right) = \frac{1}{2} [\ln(x) + \ln(3)]$

2. $\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right) = -\ln(2)$

3. $\ln(x+1) - \ln(x-1) = -\ln(2)$

4. $\ln(x+4) + \ln(2x) = 2\ln(x)$

5. $\ln(\sqrt{x-3}) \leq \ln(6-x) - \frac{1}{2}\ln(x)$

6. $\ln(x^2 - 2x) > \ln(4x - 5)$.

1) $\ln\left(\frac{x+3}{2}\right) = \frac{1}{2} (\ln x + \ln 3)$ $\mathcal{D} =]0; +\infty[$

$\Leftrightarrow 2\ln\left(\frac{x+3}{2}\right) = \ln x + \ln 3 \Leftrightarrow \ln\left(\frac{(x+3)^2}{4}\right) = \ln(3x)$

$\Leftrightarrow \left(\frac{x+3}{2}\right)^2 = 3x \Leftrightarrow (x+3)^2 = 12x \Leftrightarrow x^2 - 6x + 9 = 0 \Leftrightarrow x = 3 \in \mathcal{D}$

2) $\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right) = -\ln 2$ $\mathcal{D} =]-\infty; -1[\cup]1; +\infty[$

$\Leftrightarrow \frac{x+1}{x-1} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow 2(x+1) = x-1 \Leftrightarrow x = -3 \in \mathcal{D}$

3) $\ln(x+1) - \ln(x-1) = -\ln 2$ $\mathcal{D} =]1; +\infty[$

$\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right) = 0 \Leftrightarrow 2(x+1) = x-1 \Leftrightarrow x = -3 \notin \mathcal{D}$

4) $\ln(x+4) + \ln(2x) = 2\ln x$ $\mathcal{D} =]0; +\infty[$

$\Leftrightarrow \frac{2x(x+4)}{x^2} = 1 \Leftrightarrow 2(x+4) = x \Leftrightarrow x = -8 \notin \mathcal{D}$

5) $\ln\sqrt{x-3} \leq \ln(6-x) - \frac{1}{2}\ln x$

$\mathcal{D} =]3; 6[$

$\ln\frac{\sqrt{x-3}\sqrt{x}}{(6-x)} \leq 0 \Leftrightarrow \sqrt{x-3}\sqrt{x} \leq 6-x$

$\forall x \in]3; 6[, (x-3)x \leq (6-x)^2 \Leftrightarrow x^2 - 3x \leq x^2 - 12x + 36$

$\Leftrightarrow 9x \leq 36$

$x \leq 4$

$\mathcal{S} = \emptyset$

6) $\ln(x^2 - 2x) > \ln(4x - 5)$ $\mathcal{D} =]2; +\infty[$

$(]-\infty; 0[\cup]2; +\infty[) \cap]\frac{5}{4}; +\infty[$

$\frac{x^2 - 2x}{4x - 5} > 1$

$x^2 - 2x > 4x - 5$

$\mathcal{S} =]6; +\infty[$

$x^2 - 6x + 5 > 0 \quad (x-1)(x-5) > 0$

1. $e^{2x+1} - 1 = 0$ 2. $e^x + 3e^{-x} - 4 = 0$

3. $e^x - e^{2x} \leq 0$ 4. $e^{2x+5} - e^{1-x} < 0$.

1) $D = \mathbb{R}$ $e^{2x+1} = 1$ $2x+1 = 0$ $x = -\frac{1}{2}$

2) $e^x + 3e^{-x} - 4 = 0 \Leftrightarrow e^{2x} - 4e^x + 3 = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ou $x = \ln 3$
 $x^2 - 4x + 3 = 0 \Leftrightarrow (x-3)(x-1) = 0 \Leftrightarrow x = 1$ ou $x = 3$

3) $e^x - e^{2x} \leq 0$ $x - x^2 \leq 0$ $x \in [0; 1]$ $x \leq 0$

4) $e^{2x+5} - e^{1-x} < 0 \Leftrightarrow e^{2x+5} < e^{1-x} \Leftrightarrow 2x+5 < 1-x \Leftrightarrow x < -\frac{4}{3}$
 $D = \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{5}{2}; 1\right\}$ $I =]-\infty; -\frac{5}{2}[\cup]-\frac{5}{2}; -\frac{4}{3}[$

Exercice 4.6. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

1. $\arccos(x) = 2 \arcsin\left(\frac{2}{3}\right) + \frac{\pi}{2}$

2. $\arcsin(x) = \arcsin\left(\frac{4}{5}\right) + \arcsin\left(\frac{6}{13}\right)$

3. $\arctan(x) = 4 \arctan\left(\frac{1}{3}\right) - \frac{\pi}{4}$

4. $\arcsin(x) = \arccos\left(\frac{1}{3}\right) + \arccos\left(\frac{1}{4}\right)$.

1) on a $x = 2 \arcsin\left(\frac{2}{3}\right) + \frac{\pi}{2}$ $x \in [-1; 1]$

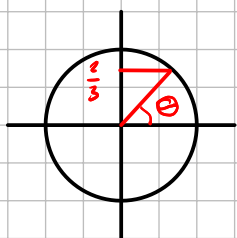
Posons $\theta = \arcsin\left(\frac{2}{3}\right)$. $\Rightarrow \sin \theta = \frac{2}{3}$ $\theta \in]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$
 $2 \arcsin\left(\frac{2}{3}\right) + \frac{\pi}{2} = 2\theta + \frac{\pi}{2}$
 $\cos\left(2\theta + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin(2\theta) = -2 \sin \theta \cos \theta = -2 \cdot \frac{2}{3} \cdot \sqrt{1 - \frac{4}{9}} = -\frac{4\sqrt{5}}{3}$

on a $x = 2\theta + \frac{\pi}{2} \Rightarrow x = \cos\left(2\theta + \frac{\pi}{2}\right) = -\frac{4\sqrt{5}}{3}$

si $2\theta + \frac{\pi}{2} \in [-1; 1]$...

$\theta = \arcsin\left(\frac{2}{3}\right) \Rightarrow 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}$ car $\sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} \approx 0,707 > \frac{2}{3}$

$\Rightarrow 2\theta + \frac{\pi}{2} \in \left[\frac{\pi}{2}; \pi\right] \Rightarrow x \leq 0$



$$2) \arcsin(x) = \arcsin\left(\frac{4}{5}\right) + \arcsin\left(\frac{6}{13}\right) \quad 0 < \frac{6}{13} < \frac{1}{2}$$

5

inutile

$$\left\{ \begin{array}{l} x \in [-1; 1], \quad \alpha = \arcsin \frac{4}{5}, \quad \beta = \arcsin \frac{6}{13} \\ \sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \sin \beta \cos \alpha \quad \alpha \in [0; \frac{\pi}{2}] \text{ et } \beta \in [0; \frac{\pi}{2}] \\ \sin(\alpha + \beta) = \frac{4}{5} \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{6}{13}\right)^2} + \frac{6}{13} \sqrt{1 - \left(\frac{4}{5}\right)^2} = \frac{4}{5} \frac{\sqrt{133}}{13} + \frac{6}{13} \cdot \frac{3}{5} = \frac{4\sqrt{133} + 18}{65} \\ \text{si } \sin \alpha + \beta \in [-1; 1], \quad x = \frac{4\sqrt{133} + 18}{65} \end{array} \right.$$

Mais ... $\arcsin \frac{4}{5} + \arcsin \frac{6}{13} > 1 \Rightarrow \text{ } \neq$

$$3) \arctan x = 4 \arctan\left(\frac{1}{3}\right) - \frac{\pi}{4}$$

$$\arctan : \mathbb{R} \rightarrow]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$$

$$\alpha = \arctan \frac{1}{3} > 0$$

$$x \in \mathbb{R};$$

$$A. \text{ then } 4 \arctan\left(\frac{1}{3}\right) - \frac{\pi}{4} \in]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$$

$$\tan \frac{\pi}{6} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\tan \frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$$

$$\frac{1}{3} < \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \alpha < \frac{\pi}{6}$$

$$4\alpha - \frac{\pi}{4} < \frac{4\pi}{6} - \frac{\pi}{4} = \frac{16-6}{24} \pi = \frac{10\pi}{24} = \frac{5\pi}{12}$$

$$4\alpha - \frac{\pi}{4} < \frac{\pi}{2}$$

$$-\frac{\pi}{4} > -\frac{\pi}{2} \Rightarrow 4\alpha - \frac{\pi}{4} > 4\alpha - \frac{\pi}{2} > -\frac{\pi}{2}$$

Donc $4\alpha - \frac{\pi}{2} \in]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$ car $\alpha > 0$

$$\alpha = \arctan\left(\frac{1}{3}\right)$$

$$\tan\left(4\alpha - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\tan(4\alpha) - \tan \frac{\pi}{4}}{1 + \tan 4\alpha \tan \frac{\pi}{4}}$$

$$\tan(a+b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b}$$

$$\tan \frac{\pi}{4} = 1$$

$$\tan\left(4\alpha - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\tan(4\alpha) - 1}{1 + \tan(4\alpha)} = \frac{\tan 4\alpha - 1}{\tan 4\alpha + 1}$$

$$\tan(2\alpha) = \frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha} = \frac{\frac{2}{3}}{1 - \frac{1}{9}} = \frac{\frac{2}{3}}{\frac{8}{9}} = \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

$$\tan(4\alpha) = \frac{2 \tan 2\alpha}{1 - \tan^2 2\alpha} = \frac{2 \cdot \frac{3}{4}}{1 - \frac{9}{16}} = \frac{\frac{3}{2}}{\frac{7}{16}} = \frac{3}{2} \times \frac{16}{7} = \frac{24}{7}$$

$$\tan\left(4\alpha - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\frac{24}{7} - 1}{\frac{24}{7} + 1} = \frac{24-7}{24+7} = \frac{17}{31}$$

$$\boxed{x = \frac{17}{31}}$$

$$4. \arcsin(x) = \arccos\left(\frac{1}{3}\right) + \arccos\left(\frac{1}{4}\right)$$

Posons $\alpha = \arccos\left(\frac{1}{3}\right)$ et $\beta = \arccos\left(\frac{1}{4}\right)$ A-t-on $\alpha + \beta \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$?

x	0	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0

y	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\arccos y$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{6}$	0

sans calculatrice? Difficile d'évaluer $\arccos \frac{1}{3} + \arccos \frac{1}{4}$

Mais, $\alpha + \beta \approx 2,55 \notin \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$. $\text{J} = \emptyset$

Exercice 4.7. En justifiant les calculs, déterminer, lorsqu'elles existent, les limites suivantes :

1. $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x \ln x}{\ln(x+1)}$

2. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x - \ln x)$

3. $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left[2 + \sin\left(\frac{1}{x}\right) \right] \ln(x)$

4. $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{x^2-5x+1}$

5. $\lim_{x \rightarrow -\infty} (e^{2x} - e^{-x})$

6. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{e^{2x} + x}{e^x - 1} - e^x \right)$

7. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x^2}$

8. $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{x-\sin(x)}$

9. $\lim_{x \rightarrow +\infty} [\ln(1 + e^x) - x]$

1) $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x = 0$ [Pas d'avis, le cours Δ]

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1 \Rightarrow \lim_{y \rightarrow 1} \frac{y - 1}{\ln y} = 1 \Rightarrow \lim_{y \rightarrow 0} \frac{t}{\ln(1+t)} = 1$$

En posant $y = e^x$, $\lim_{x \rightarrow 0} y = 1$ donc

En posant $t = y - 1$ donc

$$\lim_{y \rightarrow 1} t = 0$$

on $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty$ donc $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x \ln x}{\ln(1+x)} = "1 \times -\infty" = -\infty$

2) $\lim_{x \rightarrow +\infty} x - \ln x$ $\forall x > 0, \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^a} = 0$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (x - \ln x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left[1 - \frac{\ln x}{x} \right] = "+\infty \times (1 - 0)" = +\infty.$$

3) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(2 + \sin \frac{1}{x} \right) \ln x$

$\forall x > 0, 1 \leq 2 + \sin \frac{1}{x} \leq 3 \Rightarrow \forall x \in]0, 1[\quad \left(2 + \sin \frac{1}{x} \right) \ln x \leq \ln x$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(2 + \sin \frac{1}{x} \right) \ln x = -\infty$$

4) $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{x^2-5x+1}$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 - 5x + 1 = +\infty \Rightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} (x^2 - 5x + 1) = +\infty$$

$$x^2 \left[1 - \frac{5}{x} + \frac{1}{x^2} \right]$$

$$5) \lim_{x \rightarrow -\infty} (e^{2x} - e^{-x}) = "0 - (+\infty)" = -\infty$$

$$6) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{e^{2x+x}}{e^x - 1} - e^x \right) = l \quad \text{FI } \infty - \infty$$

$$\forall x > 0, \quad \frac{e^{2x+x}}{e^x - 1} - e^x = \frac{e^{2x+x} - e^{2x} + e^{2x}}{e^x - 1} = \frac{e^{2x+x}}{e^x - 1} = \frac{1 + \frac{x}{e^x}}{1 - \frac{1}{e^x}}$$

$$\text{Th cc } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^x} = 0 \text{ donc } l = 1.$$

$$7) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} \cdot \frac{1}{x} \quad \text{or } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

Non défini:

et $\frac{1}{x}$ n'a pas de limite

$$8) \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{x - \sin x}$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad 0 \leq e^{x - \sin x} \leq e^{x-1} \Rightarrow 0 \leq \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{x - \sin x} \leq \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{x-1} = 0$$

Th
squelette

$$9) \lim_{x \rightarrow +\infty} [\ln(1 + e^x) - x] = l$$

$$\forall x > 0 \quad \ln(1 + e^x) - x = \ln(1 + e^x) - \ln(e^x) = \ln\left(\frac{1 + e^x}{e^x}\right)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 + e^x}{e^x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} 1 + e^{-x} = 1 \Rightarrow l = \ln(1) = 0$$

Exercice 4.8. Soit f la fonction définie par $f(x) = \sqrt{x} \left(e^{\frac{1}{x}} - 1 \right) \sin(x)$.

1. Déterminer les domaines de définition et de continuité de f .
2. Montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} \left(e^{\frac{1}{x}} - 1 \right) = 0$.
3. Calculer les limites de f aux bornes de son domaine de définition.

1) $\mathcal{D}_f :]0; +\infty[\quad f \text{ continue sur } \mathcal{D}_f \quad (\text{opérateur})$

2) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} \left(e^{\frac{1}{x}} - 1 \right) = ?$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^{\frac{1}{2}} \left(e^{x^{-1}} - 1 \right) = \lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{e^y - 1}{\sqrt{y}} = \lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{e^y - 1}{y} \times \sqrt{y} = 1 \times 0 = 0.$$

On pose $y = \frac{1}{x}$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0^+$

3) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} \left(e^{\frac{1}{x}} - 1 \right) \sin x = 0$ car $\sin x \in [-1; 1]$ et QZ. + Th. de Weierstrass

$\lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{x} \left(e^{\frac{1}{x}} - 1 \right) \sin x = ? \quad +\infty ?$

$$\sqrt{x} \left(e^{\frac{1}{x}} - 1 \right) x = x^{\frac{3}{2}} \left(e^{\frac{1}{x}} - 1 \right)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^{\frac{3}{2}} \left(e^{\frac{1}{x}} - 1 \right) = \lim_{y \rightarrow +\infty} y^{-\frac{3}{2}} \left(e^y - 1 \right) = \lim_{y \rightarrow +\infty} e^y \left[\frac{e^y}{y^{\frac{3}{2}}} - \frac{1}{e^y} \right]$$

$$= "+\infty \times (1 - 0)" = +\infty$$

$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x}{x} = 1$ donc

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{x} \left(e^{\frac{1}{x}} - 1 \right) x \cdot \frac{\sin x}{x} = "+\infty \times 1" = +\infty$$

Exercice 4.9. Calculer la dérivée f' de la fonction f en précisant les domaines de définition de f et de f' dans les cas suivants :

9

1. $f(x) = \ln(x^2 - 2x)$ 2. $f(x) = (1+x)^{\frac{1}{x}}$ 3. $f(x) = e^{-x^2} \sqrt{x(x+2)}$

4. $f(x) = \frac{e^{1+x}}{\sqrt{1-x}}$ 5. $f(x) = \ln \left| \frac{1+x}{1-x} \right|$ 6. $f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$.

1) $f(x) = \ln(x^2 - 2x)$ $\mathcal{D}_f =]-\infty; 0[\cup]2; +\infty[= \mathcal{D}_{f'}$ (opérateur)
 $f'(x) = \frac{2x-2}{x^2-2x}$

2) $f(x) = (1+x)^{\frac{1}{x}} = \exp\left(\frac{1}{x} \ln(1+x)\right)$; $x > -1$ (fonction définie pour $x > 0$)
 $\mathcal{D}_f = \mathcal{D}_{f'} =]1; +\infty[$
 $f'(x) = \left[-\frac{1}{x^2} \ln(1+x) + \frac{1}{x(1+x)} \right] \exp\left(\frac{1}{x} \ln(1+x)\right)$

3) $f(x) = e^{-x^2} \sqrt{x(x+2)}$ $\mathcal{D}_f =]-\infty; -2] \cup [0; +\infty[$
 f dérivable sur $]0; +\infty[$ donc $\mathcal{D}_{f'} =]-\infty; -2[\cup]0; +\infty[$.
 $f'(x) = e^{-x^2} \left[-2x \cdot x(x+2)^{-\frac{1}{2}} + \frac{1}{2} (2x+2) x(x+2)^{-\frac{1}{2}} \right]$

4) $f(x) = \frac{e^{1+x}}{\sqrt{1-x}}$ $\mathcal{D}_f =]-\infty; 1[= \mathcal{D}_{f'}$
 $1-x > 0 \Leftrightarrow x < 1$
 $f(x) = e^{1+x} (1-x)^{-\frac{1}{2}} \Rightarrow f'(x) = e^{1+x} \left[(1-x)^{-\frac{1}{2}} + \frac{1}{2} (1-x)^{-\frac{3}{2}} \right]$

5) $f(x) = \ln \left| \frac{1+x}{1-x} \right|$ $\mathcal{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{-1; 1\}$
 f dérivable sur $\mathbb{R}^*$ $\Rightarrow \mathcal{D}_{f'} = \mathcal{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{-1; 1\}$
 $\forall x \in \mathcal{D}_f$,
 $f(x) = \ln|1+x| - \ln|1-x|$ donc :
 sur $]1; +\infty[$, $f(x) = \ln(1+x) - \ln(x-1) \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{1+x} - \frac{1}{x-1}$
 sur $] -1; 1[$, $f(x) = \ln(1+x) - \ln(1-x) \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{1+x} - \frac{1}{1-x}$
 sur $] -\infty; -1[$, $f(x) = \ln(-1-x) - \ln(1-x) \Rightarrow f'(x) = \frac{-1}{-1-x} - \frac{1}{1-x}$.

$$6) f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$$

$$D_f = \{x \in \mathbb{R}, x + \sqrt{x^2 + 1} > 0\} = \mathbb{R}$$

$$x + \sqrt{x^2 + 1} > 0 \text{ si } x > 0$$

$$\text{si } x < 0 \dots x + \sqrt{x^2 + 1} > 0 \Leftrightarrow \sqrt{x^2 + 1} > -x \stackrel{①}{> 0} \left. \begin{array}{l} \text{à rédiger} \\ \leftarrow \end{array} \right\}$$

$$x \mapsto x^2 \nearrow \text{sur }]0; +\infty[\Rightarrow ① \Leftrightarrow x^2 + 1 > x^2 \Rightarrow 1 > 0$$

$$\Rightarrow \forall x \in \mathbb{R}, x + \sqrt{x^2 + 1} > 0$$

$$D_{f'} = D_f \quad f'(x) = \frac{1 + \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}}{x + \sqrt{x^2 + 1}}$$

Exercice 4.10. Soit f la fonction définie par $f(x) = \ln(e^x - e^{-x})$.

1. Étudier la fonction f et construire son graphe.
2. Montrer que f réalise une bijection de $]0, +\infty[$ sur un intervalle J à préciser, et déterminer l'expression de f^{-1} .

$$1) D_f = \{x \in \mathbb{R}, e^x - e^{-x} > 0\}. \quad \forall x \in \mathbb{R}, e^x - e^{-x} > 0 \Leftrightarrow e^x > e^{-x} \Leftrightarrow x > -x \Leftrightarrow x > 0$$

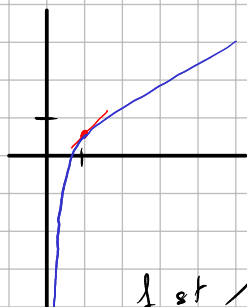
$$D_f =]0; +\infty[. \quad f \text{ dérivable sur } D_f \text{ par opérateur}$$

$$f'(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} > 0 \Rightarrow f \text{ est } \nearrow \text{ sur }]0; +\infty[$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -\infty \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

$$f(1) = \ln(e - e^{-1}) \approx \ln(2,7 - 0,6) = \ln 2,1$$

$$f'(1) = \frac{e + e^{-1}}{e - e^{-1}} \approx \frac{2,7 + 0,4}{2,7 - 0,4} = 1,2$$



$$2) f \text{ est } \nearrow \text{ de }]0; +\infty[\text{ vers }]-\infty; +\infty[, f \in \mathcal{C}^0(]0; +\infty[)$$

$$\Rightarrow f \text{ bij de }]0; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$$

$$\forall x > 0, \forall y \in \mathbb{R}, f(x) = y \Leftrightarrow f^{-1}(y) = x$$

$$f(x) = y \Leftrightarrow \ln(e^x - e^{-x}) = y \Leftrightarrow e^x - e^{-x} = e^y$$

$$e^x - e^{-x} = e^y \Leftrightarrow e^{2x} - e^x e^y - 1 = 0$$

$$e^{x_1} = \frac{e^y + \sqrt{e^{2y} + 4}}{2} < 0$$

$$\Delta = e^{2y} + 4 > 0$$

$$e^{x_2} = \frac{e^y + \sqrt{e^{2y} + 4}}{2}$$

$$\Rightarrow f^{-1}(y) = \ln\left(\frac{e^y + \sqrt{e^{2y} + 4}}{2}\right)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta = b^2 - 4ac \\ -\frac{b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} \end{array} \right.$$

$$2) \quad \forall x > 0, \forall y \in \mathbb{R}, f(x) = y \Leftrightarrow \ln(e^x - e^{-x}) = y \\ \Leftrightarrow e^x - e^{-x} = e^y \Leftrightarrow e^x - e^y - e^{-x} = 0 \Leftrightarrow e^{2x} - e^x e^y - 1 = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = e^{2y} + 4 > 0$$

$$e^x = \frac{1}{2} \left(e^y - \sqrt{e^{2y} + 4} \right) < 0$$

$$e^x = \frac{1}{2} \left(e^y + \sqrt{e^{2y} + 4} \right) > 0$$

$$y = \ln \left(\frac{1}{2} (e^y + \sqrt{e^{2y} + 4}) \right)$$

?

Exercice 4.11. Soit $f(x) = (1+x)^x$ et $g(x) = \ln(1+x) + \frac{x}{1+x}$.

1. Vérifier que f et g ont le même domaine de définition D que l'on déterminera.
2. Calculer les limites de f aux bornes de son domaine de définition.
3. Montrer que, pour tout $x \in D$, $f'(x)$ est du même signe que $g(x)$.
4. Étudier les variations de la fonction g et en déduire le signe de f' . On remarquera que $g(0) = 0$.
5. Dresser le tableau de variations et tracer le graphe de f .

$$1. \quad \mathcal{D}_g =]-1; +\infty[\quad ; \quad f(x) = \exp(x \ln(1+x)) \text{ et } \mathcal{D}_f = \mathcal{D}_g$$

$$2. \quad \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} \exp(x \ln(1+x)) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

$$3. \quad f \text{ dérivable sur } \mathcal{D}_f \text{ (opérateur)} \text{ et } \forall x \in \mathcal{D}_f, f'(x) = \left(\ln(1+x) + \frac{x}{1+x} \right) e^{x \ln(1+x)}$$

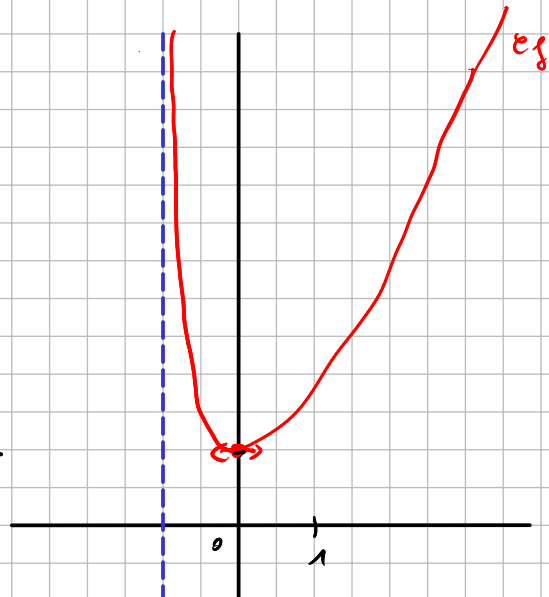
donc signe de $g(x)$

$$3. \quad g \text{ dérivable sur } \mathcal{D}_g \text{ et } \forall x > -1, g'(x) = \ln(1+x) + 1 - \frac{1}{1+x}$$

$$\Rightarrow g'(x) = \frac{1}{1+x} + \frac{1}{(1+x)^2} = \frac{2+x}{(1+x)^2} > 0$$

$$g(0) = \ln(1) + 1 - 1 = 0$$

x	-1	0	+
$g'(x)$	+	+	+
$g(x)$	-	0	+
$f'(x)$	-	0	+
f	$+\infty$	1	$+\infty$



Exercice 4.12. Montrer que, pour tout réel x non nul,

$$\arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right) = \begin{cases} -\frac{\pi}{2} & \text{si } x < 0 \\ \frac{\pi}{2} & \text{si } x > 0. \end{cases}$$

soit $f(x) = \arctan x + \arctan \frac{1}{x}$. $D_{\arctan} = \mathbb{R} \Rightarrow D_f = \mathbb{R}^*$

$\arctan$ dérivable sur $\mathbb{R} \Rightarrow f$ dérivable sur $\mathbb{R}^*$

$$\forall x \neq 0, \quad f'(x) = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{x^2} \cdot \frac{1}{1+(\frac{1}{x})^2} = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{1+x^2} = 0$$

$\Rightarrow f$ constante sur chaque intervalle de D_f

$$f(1) = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} \quad \Rightarrow \quad \forall x > 0, \quad f(x) = \frac{\pi}{2}$$

$$f(-1) = -\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4} = -\frac{\pi}{2} \quad \Rightarrow \quad \forall x < 0, \quad f(x) = -\frac{\pi}{2}$$

Exercice 4.13. Étudier et représenter les fonctions suivantes :

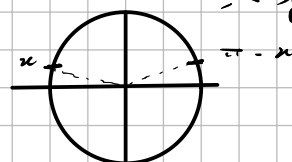
$$x \mapsto \arcsin(\sin x), \quad x \mapsto \arccos(\cos x), \quad x \mapsto \arctan(\tan x).$$

$$\begin{aligned} a) \quad f(x) &= \arcsin(\sin x) & \forall x \in \mathbb{R}, \quad \sin x \in [-1; 1] & \Rightarrow D_f = \mathbb{R} \\ \arcsin &\text{ dérivable sur }]-1; 1[& & f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}) \\ \sin x = \pm 1 & (\Leftrightarrow) x = \pm \frac{\pi}{2} + 2k\pi & \left\{ \begin{array}{l} f \text{ dérivable} \end{array} \right. \end{aligned}$$

$\sin$ 2π -périodique $\Rightarrow f$ 2π -périodique

$\sin$ est impaire $\Rightarrow f(-x) = \arcsin(-\sin x) = -f(x)$

f impaire.

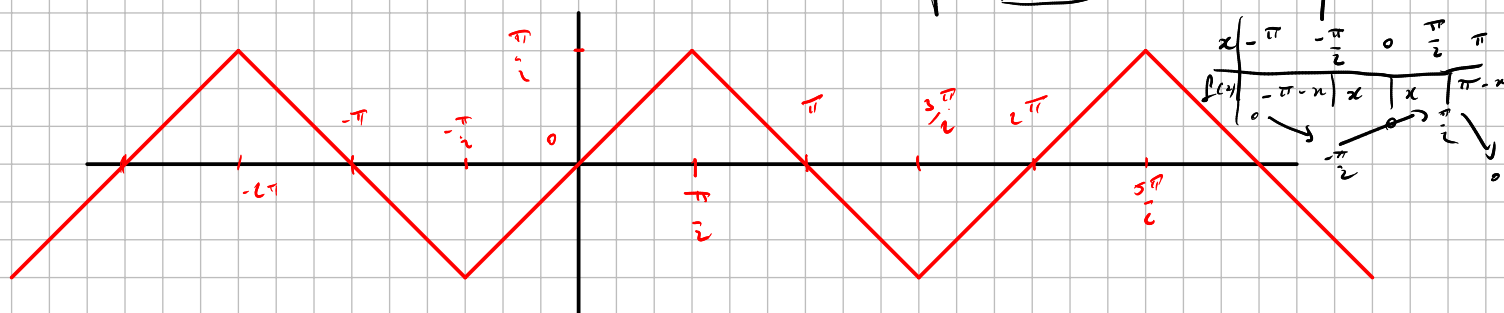


Etude sur $[0, \frac{\pi}{2}]$ f dérivable en x car $\sin x \in]-1; 1[\Leftrightarrow x \neq \frac{\pi}{2}$

$$\forall x \in [0; \frac{\pi}{2}) \quad f(x) = x.$$

$$\text{paire} \quad \forall x \in [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}] \quad f(x) = x$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{sur } [\frac{\pi}{2}; \pi] \\ \sin(x) = \sin(\pi - x) \\ \Rightarrow \boxed{f(x) = \pi - x} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{périod} \\ + \text{paire} \end{array}$$



$$2) f(x) = \arccos(\cos x) \quad x \mapsto \cos x \mapsto \arccos(\cos x)$$

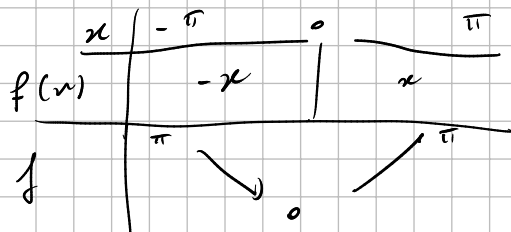
13

- $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R})$ par composition
- $\cos$ 2π périodique $\Rightarrow f$ 2π - périodique. Étude sur $[-\pi; \pi]$
- $\cos$ pair $\Rightarrow f(-x) = f(x) \Rightarrow f$ pair. Étude sur $[0; \pi]$

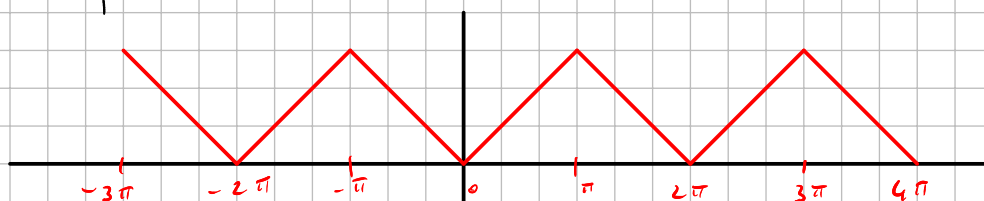
$$\forall x \in [0; \pi] \quad f(x) = x$$

Par symétrie, $\forall x \in [-\pi; 0]$

$$f(x) = -x$$



On répète la partie $[-\pi; \pi]$ sur $\mathbb{R}$



$$3) f(x) = \arctan(\tan x)$$

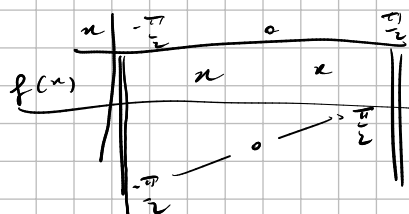
$$\mathcal{D}_{\tan} = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\} = \mathbb{R} - \frac{\pi}{2}\mathbb{Z}, \quad \mathcal{D}_{\arctan} = \mathbb{R}$$

$$\mathcal{D}_f = \mathbb{R} - \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\} \quad f \in \mathcal{C}^0(\mathcal{D}_f)$$

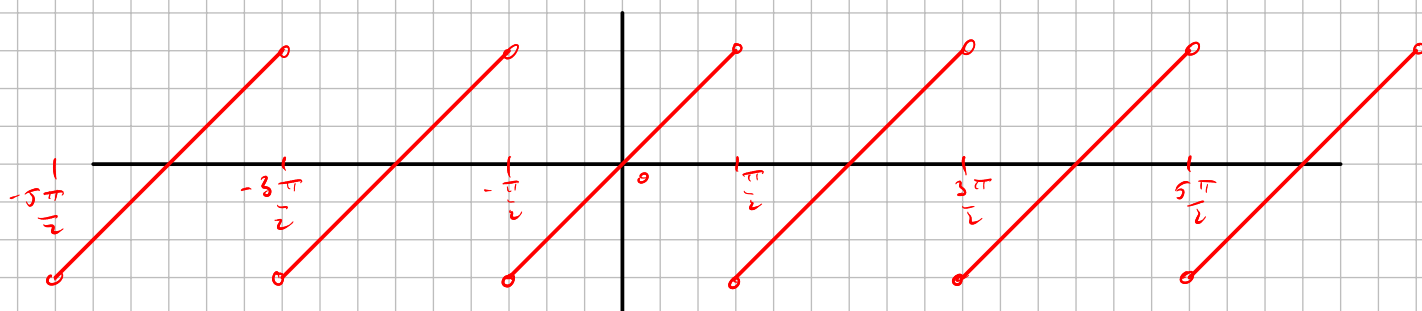
- $\tan$ est π - périodique $\Rightarrow f$ π périodique. Étude sur $]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$
- $\tan$ est impair et $\arctan$ impair $\Rightarrow f$ impair.

$$\forall x \neq \frac{\pi}{2} \quad f(-x) = \arctan(\tan(-x)) = \arctan(-\tan x) = -\arctan(\tan x) = -f(x)$$

$$\forall x \in]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[\quad f(x) = x \quad \Rightarrow \quad \forall x \in]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[\quad f(x) = x$$



$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \arctan(\tan x) = \frac{\pi}{2}$$



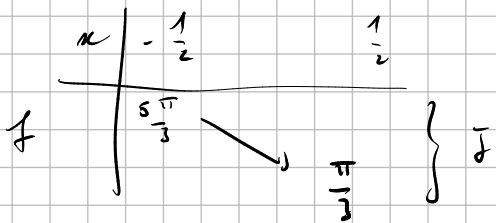
Exercice 4.14. Soit f la fonction définie par $f(x) = \arccos(2x) + \arccos(x)$.

- Déterminer le domaine de définition D_f de f .
- Préciser les variations de f , et en déduire que f réalise une bijection de D_f sur un intervalle J à préciser.
- On considère l'équation (E) : $f(x) = \frac{\pi}{2}$.
 - Montrer que, pour tout $x \in [-1, 1]$, $\sin[\arccos(x)] = \sqrt{1-x^2}$.
 - Montrer que l'équation (E) admet une unique solution et, puis, déterminer celle-ci.

1) $D_{\arccos} = [-1; 1]$

$$D_f = \{x \in \mathbb{R}, 2x \in [-1; 1] \text{ et } x \in [-1; 1]\} = \left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right]$$

2) $\arccos$ st $\searrow$ sur $[-1; 1] \Rightarrow f \searrow$ sur $\left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right]$



$$f\left(-\frac{1}{2}\right) = \arccos(-1) + \arccos\left(-\frac{1}{2}\right) = \pi + \frac{2\pi}{3} = \frac{5\pi}{3}$$

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \arccos(1) + \arccos\left(\frac{1}{2}\right) = 0 + \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{3}$$

$$f \in \mathcal{C}^0\left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right] \text{ et } f \text{ st } \searrow \Rightarrow f \text{ bij de } \left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right] \text{ vers } \left[\frac{\pi}{3}; \frac{5\pi}{3}\right] = J$$

3) a) compos prop 4.8 p 42 (no - démontré dans le cours ...)

$$\forall x \in [-1; 1], \sin(\arccos x) = ? \quad \sin^2(\arccos x) = 1 - \cos^2(\arccos x)$$

$$\forall x \in [-1; 1], \arccos x \in [0; \pi] \text{ donc } \sin(\arccos x) \stackrel{= 1-x^2}{\geq} 0$$

$$\text{donc } \sin(\arccos x) = \sqrt{1-x^2}$$

b) $\frac{\pi}{2} \in \left[\frac{\pi}{3}; \frac{5\pi}{3}\right] \Rightarrow f(x) = \frac{\pi}{2}$ admet une unique solution dans $\left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right]$

$$f(x) = \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \arccos 2x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$$

$$\Leftrightarrow \arccos 2x = \frac{\pi}{2} - \arccos x$$

$$\Rightarrow \arccos 2x = \arcsin x \Rightarrow \sin \arccos 2x = \sin \arcsin x$$

$$\Rightarrow \sqrt{1-(2x)^2} = x \Rightarrow 1-(2x)^2 = x^2 \Leftrightarrow 5x^2 = 1$$

$$\Rightarrow x = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$\frac{1}{\sqrt{5}} \in \left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right] \text{ et est l'unique soluc}$$

Exercice 4.15. Soit f la fonction définie par $f(x) = \arccos(1 - 2x^2)$.

1. Déterminer le domaine de définition D_f et préciser la parité de f .
2. Pour $x \in [0, 1]$, on pose $x = \sin t$ avec $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. Calculer et simplifier $f(\sin t)$.
3. En déduire une expression simple de f d'abord sur $[0, 1]$ et puis sur D_f .
4. Tracer le graphe de f .

$$1) \quad D_f = \{x \in \mathbb{R}, 1 - 2x^2 \in [-1, 1]\} \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad -1 \leq 1 - 2x^2 \leq 1$$

$$\Leftrightarrow -2 \leq -2x^2 \leq 0$$

$$\Leftrightarrow 0 \leq x^2 \leq 1$$

$$\Leftrightarrow -1 \leq x \leq 1$$

$$\forall x \in [-1, 1] \quad f(-x) = f(x) \Rightarrow f \text{ pair}$$

$$f \in \mathcal{C}^0([-1, 1])$$

$$2) \quad \forall x \in [0, 1], \exists! t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], x = \sin t, t = \arcsin x$$

$$f(\sin t) = \arccos(1 - 2\sin^2 t) = \arccos(\cos 2t) = 2t$$

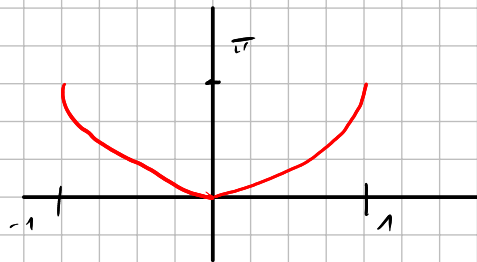
$$t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \Rightarrow 2t \in [0, \pi]$$

$$\text{Donc, } \forall x \in [0, 1],$$

$$f(x) = f(\sin(\arcsin x)) = 2 \arcsin x$$

$$\forall x \in [-1, 0]$$

$$f(x) = f(-x) = 2 \arcsin(-x) = -2 \arcsin x$$

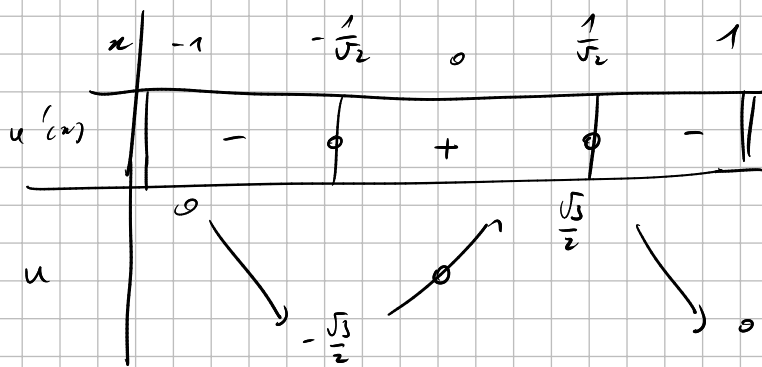


$$f(x) = \begin{cases} 2 \arcsin x & \text{si } x \in [0, 1] \\ -2 \arcsin x & \text{si } x \in [-1, 0] \end{cases}$$

Exercice 4.16. Soit f la fonction définie par $f(x) = \arcsin(2x\sqrt{1-x^2})$.

1. Étudier les variations de la fonction u définie par $u(x) = 2x\sqrt{1-x^2}$.
2. En déduire le domaine de définition et préciser la parité de f .
3. Calculer $f'(x)$ pour $x \in [0, 1[\setminus \{1/\sqrt{2}\}$ et en déduire une expression simple de f sur $[0, 1]$.
4. Étudier la dérivabilité de f en $1/\sqrt{2}$ et en 1.
5. Tracer le graphe de f .

1) $D_u = \{x \in \mathbb{R}, 1-x^2 \geq 0\} = [-1; 1]$ $u(x) = 2x\sqrt{1-x^2}$
 u dérivable sur $] -1; 1[$. $u'(x) = 2\sqrt{1-x^2} + 2x \cdot \frac{1}{2}(-2x)(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}$
 u impair $u'(x) = 2 \frac{1-x^2-x^2}{\sqrt{1-x^2}} = 2 \frac{1-2x^2}{\sqrt{1-x^2}}$



$$u\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

2) $\forall x \in [-1; 1], u(x) \in \left[-\frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}\right] \subset [-1; 1] \Rightarrow D_f = D_u = [-1; 1]$
 u impair et $\arcsin$ aussi impair donc f impair.

3) $f'(x) : (\arcsin \circ u)'(x) = u'(x) \frac{1}{\sqrt{1-u^2(x)}} = 2 \frac{1-2x^2}{\sqrt{1-x^2}} \frac{1}{\sqrt{1-4x^2(1-x^2)}}$

$\forall x \in [0; 1[\setminus \{1/\sqrt{2}\}$ u dérivable et $u'(x) = 2 \frac{1-2x^2}{\sqrt{1-x^2}} \in]-1; 1[$

$$f'(x) : \frac{2(1-2x^2)}{\sqrt{1-x^2} \sqrt{1-4x^2+4x^4}} = \frac{2(1-2x^2)}{\sqrt{1-x^2} \sqrt{(1-2x^2)^2}} = \frac{2}{\sqrt{1-x^2}} \quad \forall x \in [0; \frac{1}{\sqrt{2}}[$$

$\Rightarrow f(x) = 2 \arcsin x + k, \quad \forall x \in [0; \frac{1}{\sqrt{2}}[$

$f(0) = \arcsin 0 = 0 \Rightarrow f(x) = 2 \arcsin(x), \quad \forall x \in [0; \frac{1}{\sqrt{2}}[$

si $x \in]\frac{1}{\sqrt{2}}; 1[$, $1-2x^2 < 0 \Rightarrow f'(x) = \frac{-2}{\sqrt{1-x^2}} \Rightarrow \exists k \in \mathbb{R}, f(x) = -2 \arcsin x + k$

$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} -2 \arcsin x = -2 \arcsin 1 = -\pi$

$\Rightarrow f(x) = 2 \arcsin x + \pi, \quad \forall x \in]\frac{1}{\sqrt{2}}; 1]$

$$f(x) = \begin{cases} 2 \arcsin x, & x \in [0; \frac{1}{\sqrt{2}}] \\ -2 \arcsin x + \pi, & x \in]\frac{1}{\sqrt{2}}; 1] \end{cases}$$

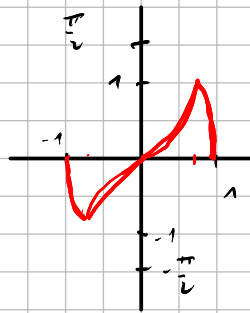
$$f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \arcsin\left(\frac{2}{\sqrt{2}} \sqrt{1 - \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2}\right) = \arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{1 - \frac{1}{2}}\right) = \arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \arcsin\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{6}$$

$$2 \arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 2 \cdot \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$$

4) En 1, $\frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \frac{-\pi + 2 \arcsin x}{x - 1} = -2 \frac{\arcsin x - \frac{\pi}{2}}{x - 1} \xrightarrow{x \rightarrow 1} -\infty$
 (Cours)

En $\frac{1}{\sqrt{2}}$, les dérivées à g et à d ont des limites $\neq$

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}^-} f'(x) &= \lim_{x \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}^-} \frac{2}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{2}{\sqrt{\frac{1}{2}}} = 2\sqrt{2} \\ \lim_{x \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}^+} f'(x) &= \lim_{x \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}^+} \frac{-2}{\sqrt{1-x^2}} = -\frac{2}{\sqrt{\frac{1}{2}}} = -2\sqrt{2} \end{aligned} \right\}$$



1. $f(x) = \ln(x+1) - \ln(x)$
2. $f(x) = x + \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$
3. $f(x) = \frac{1}{e^x - 1} - x - 1$
4. $f(x) = (x+2)e^{\frac{1}{x}}$.

On précisera le domaine de définition, les limites aux bornes et branches infinies, sens de variation et convexité et on tracera le graphe de f .

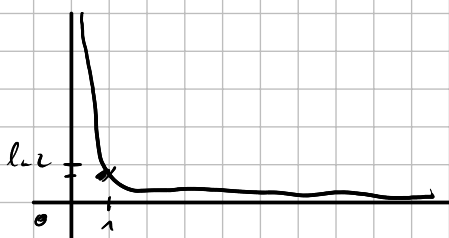
1) $f(x) = \ln(x+1) - \ln(x)$ $D_f =]0; +\infty[$
 f dérivable sur $]0; +\infty[$
 $\forall x > 0, f'(x) = \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x} = \frac{-1}{x(x+1)} < 0$ sur $]0; +\infty[$

$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$ $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) = 0$



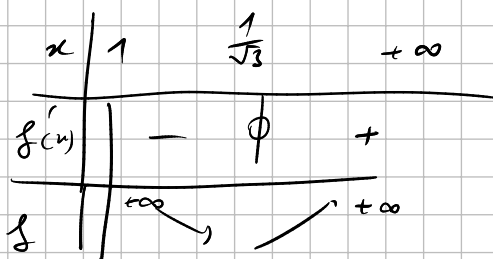
$f''(x) = \frac{-1}{(x+1)^2} + \frac{1}{x^2} > 0$
 f convexe sur $]0; +\infty[$

$f(x) = \ln 2$



2) $f(x) = x + \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$ $D_f =]-\infty; -1[\cup]1; +\infty[$
 f dérivable sur D_f $f(-x) = -x + \ln\left(\frac{-x+1}{-x-1}\right) = -x + \ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right) = -x - \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right) = -f(x)$

$\forall x > 1, f(x) = x + \ln(x+1) - \ln(x-1)$ f impair.
 $f'(x) = 1 + \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x-1} = \frac{x^2 - 1 + x - 1 - x + 1}{x^2 - 1} = \frac{x^2 - 3}{x^2 - 1}$

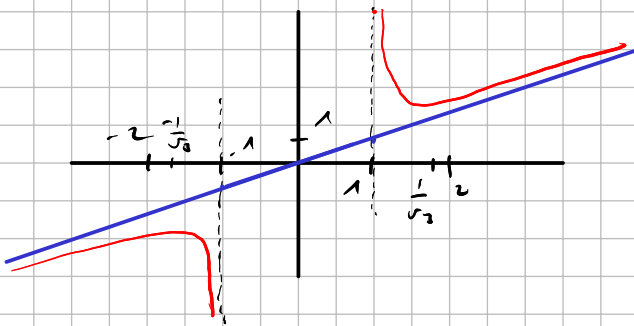


$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = +\infty$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

$f''(x) = 1 - \frac{1}{(x+1)^2} + \frac{1}{(x-1)^2} > 0$
 f conv

$f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{1}{\sqrt{3}} + \ln\left(\frac{\frac{1}{\sqrt{3}}+1}{\frac{1}{\sqrt{3}}-1}\right) = \frac{1}{\sqrt{3}} + \ln\left(\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}\right)$



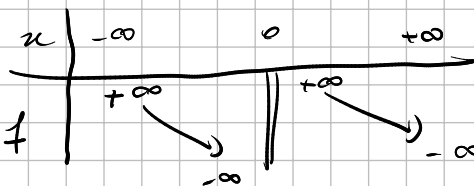
3) $f(x) = \frac{1}{e^x - 1} - x - 1$ $D_f = \mathbb{R}^*$ f derivable su $\mathbb{R}^*$

$f'(x) = \frac{-e^x}{(e^x - 1)^2} - 1 < 0 \Rightarrow f$ st $\searrow$ su $] -\infty; 0[$
 et su $] 0; +\infty[$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$ $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$

$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \frac{1}{0^+} + \dots = +\infty$

$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \frac{1}{0^-} = -\infty$



$f(-1) = \frac{1}{e^{-1} - 1} = \frac{e}{1 - e} \approx \frac{2.7}{-1.7} = -1.6$

$f''(x) = \frac{-e^x(e^x - 1)^2 + e^x e^x (e^x - 1)}{(e^x - 1)^4} = \frac{e^x}{(e^x - 1)^3} (e^{2x} - e^x(e^x - 1))$

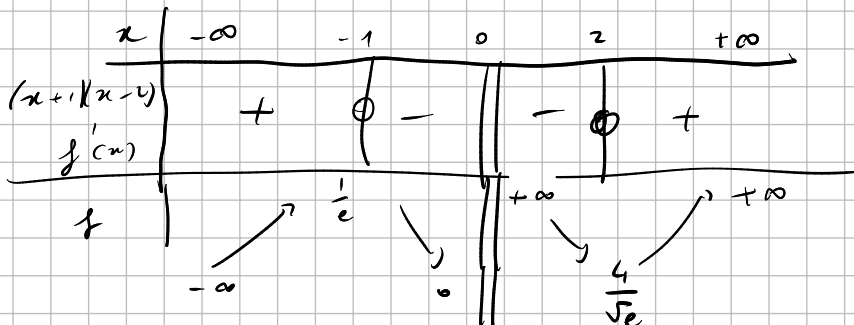
$f''(x) = \frac{e^{3x}}{(e^x - 1)^3}$ du signe de $x \Rightarrow f$ CCV su $] -\infty; 0[$

$y = -x - 1$ AO en $+\infty$; $y = -x - 2$ AO en $-\infty$

f CVX su $] 0; +\infty[$

4) $f(x) = (x+2)e^{\frac{1}{x}}$ $D_f = \mathbb{R}^*$ f derivable su $\mathbb{R}^*$

$f'(x) = e^{\frac{1}{x}} \left[1 - \frac{x+2}{x^2} \right] = \frac{x^2 - x - 2}{x^2} e^{\frac{1}{x}} = \frac{(x+1)(x-2)}{x^2} e^{\frac{1}{x}}$



$f(-1) = 1e^{-1} = \frac{1}{e}$

$f(2) = \frac{4}{e^{\frac{1}{2}}} = \frac{4}{\sqrt{e}}$

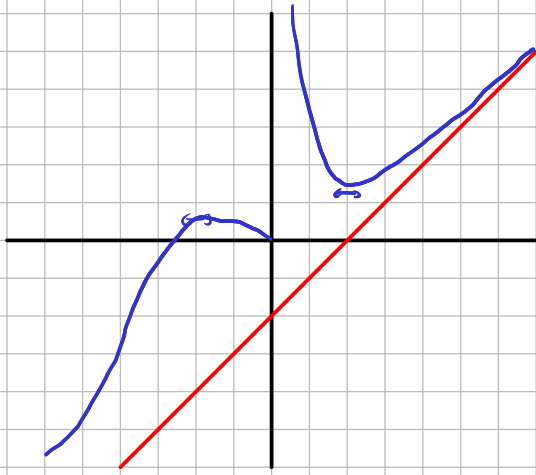
$y = x+2$ AO en $+\infty$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$

$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 0$

$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$



Exercice 4.18. Étudier la fonction f dans les cas suivants :

1. $f(x) = \arcsin(\sqrt{1-x^2})$
2. $f(x) = \arctan\left(\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right)$
3. $f(x) = \arcsin\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)$
3. $f(x) = \arccos\left(\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\right)$
5. $f(x) = \arctan\left(\frac{2x}{1-x^2}\right)$
6. $f(x) = \arcsin\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right)$

On simplifiera les expressions proposées après le calcul de la dérivée le cas échéant.

1) $f(x) = \arcsin(\sqrt{1-x^2})$ $(\sqrt{1-x^2})' = -2x \cdot \frac{1}{2} \cdot (1-x^2)^{-\frac{1}{2}}$

$D_f = \{x \in \mathbb{R}, \sqrt{1-x^2} \in [-1;1]\} = [-1;1]$

$f \in \mathcal{C}^0(-1;1)$ arcsin dérivable sur $] -1;1[\Rightarrow f$ dérivable sur $] -1;0[\cup]0;1[$

$\forall x \in] -1;0[\cup]0;1[$

$$f'(x) = \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-\sqrt{1-x^2}^2}} = \frac{-x}{\sqrt{1-x^2} \cdot \sqrt{x^2}} = \frac{-\text{sign}(x)}{\sqrt{1-x^2}}$$

x	-1	0	1
$f'(x)$		+	
$f(x)$	0	$\frac{\pi}{2}$	0

$\exists k \in \mathbb{R}, \forall x \in]0;1[, f(x) = k - \arcsin x$
 $f(\frac{1}{2}) = \arcsin(\sqrt{1-\frac{1}{4}}) = \arcsin(\frac{\sqrt{3}}{2}) = \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6} \Rightarrow k = \frac{\pi}{2}$
 f paire $\Rightarrow f(x) = \frac{\pi}{2} + \arcsin x, \forall x \in]-1;0[$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\pi}{2} - \arcsin x & \text{si } x \in [0;1] \\ \frac{\pi}{2} + \arcsin x & \text{si } x \in [-1;0] \end{cases}$$

$$2) f(x) = \arctan\left(\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right) \quad D_f =]-1;1[$$

f derivable sur $] -1;1[$

$$\forall x \in]-1;1[, f'(x) = \left(\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right)' \cdot \frac{1}{1 + \left(\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right)^2} = \frac{\sqrt{1-x^2} - x \cdot (-2x) \cdot \frac{1}{2\sqrt{1-x^2}}}{\sqrt{1-x^2} + \frac{x^2}{1-x^2}}$$

$$f'(x) = \frac{\sqrt{1-x^2} + \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}}{1-x^2} \cdot \frac{1-x^2}{1} = \sqrt{1-x^2} + \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} \quad ?$$

$$\forall x \in]-1;1[, f'(x) = \left(\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right)' \cdot \frac{1}{1 + \left(\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right)^2}$$

$$f'(x) = \frac{\sqrt{1-x^2} - x \cdot \frac{1}{2} \cdot (-2x) \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}{1-x^2} \cdot \frac{1}{1 + \frac{x^2}{1-x^2}}$$

$$f'(x) = \frac{\sqrt{1-x^2} + \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}}{1-x^2} \cdot \frac{1-x^2}{1-x^2+x^2} = \sqrt{1-x^2} + \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$f'(x) = \frac{1-x^2+x^2}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin'(x)$$

$$\Rightarrow \exists k \in \mathbb{R}, \forall x \in]-1;1[, f(x) = \arcsin x + k$$

$$f(0) = \arcsin 0 \Rightarrow k = 0 \quad \Rightarrow f(x) = \arcsin x, \quad \forall x \in]-1;1[$$

continuité $\Rightarrow [-1;1]$

$$3) f(x) = \arcsin \frac{2x}{1+x^2}$$

$$\mathcal{D}_f = \left\{ x \in \mathbb{R}, \frac{2x}{1+x^2} \in [-1; 1] \right\}$$

$$-1 \leq \frac{2x}{1+x^2} \leq 1 \Leftrightarrow -1-x^2 \leq 2x \leq 1+x^2 \Leftrightarrow -1-x^2-2x \leq 0 \text{ et } 1+x^2-2x \geq 0$$

$$\text{Ici on voit } \Rightarrow \mathcal{D}_f = \mathbb{R} \quad f \text{ dérivable ...}$$

$$\frac{2x}{1+x^2} = \pm 1 \Leftrightarrow 1+x^2-2x = 0 \Leftrightarrow x=1$$

$$\text{ou } 1+2x^2+2x = 0 \Leftrightarrow x=-1$$

f dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{-1; 1\}$

$$f'(x) = \left(\frac{2x}{1+x^2} \right)' \cdot \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)^2}} = \frac{2(1+x^2)-4x^2}{(1+x^2)^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-\frac{(2x)^2}{(1+x^2)^2}}}$$

$$f'(x) = 2 \cdot \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2} \cdot \frac{1+x^2}{\sqrt{(1+x^2)^2-(2x)^2}}$$

$$f'(x) = 2 \cdot \frac{1-x^2}{1+x^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{(1-x^2)^2}} = \frac{2\sqrt{1-x^2}}{1+x^2}$$

$$f'(x) = \left(\frac{2x}{1+x^2} \right)' \cdot \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)^2}} = \frac{2(1+x^2)-4x^2}{(1+x^2)^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{\frac{(1+x^2)^2-4x^2}{(1+x^2)^2}}}$$

$$f'(x) = \frac{2(1-x^2)}{(1+x^2)^2} \cdot \frac{1+x^2}{\sqrt{1-2x^2+x^4}} = \frac{2(1-x^2)}{1+x^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{(1-x^2)^2}}$$

$$f'(x) = \frac{2 \operatorname{sign}(1-x^2)}{1+x^2}$$

$$\exists k_1, k_2, k_3 \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} k_1 - 2 \arctan x, & x < -1 \\ k_2 + 2 \arctan x, & x \in [-1; 1] \\ k_3 - 2 \arctan x, & x > 1 \end{cases}$$

$$f(0) = 0 \Rightarrow k_2 = 0 \Rightarrow f(x) = 2 \arctan x \text{ si } x \in [-1; 1]$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0 \Rightarrow f(x) = \pi - 2 \arctan x \text{ si } x \geq 1$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0 \Rightarrow f(x) = -\pi - 2 \arctan x \text{ si } x \leq -1$$

$$4) f(x) = \arccos\left(\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\right)$$

23

$D_f = \mathbb{R}$. $\arccos$ dérivable sur $] -1; 1[\Rightarrow f$ dérivable sur $\mathbb{R}^*$
 f pair

$$f(x) = \arccos\left(\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\right) \Rightarrow f'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot (1+x^2)^{-\frac{3}{2}} \cdot \left(1 - \left(\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\right)^2\right)^{-\frac{1}{2}}$$

$$\stackrel{\text{si } x > 0}{f'(x)} = x (1+x^2)^{-\frac{3}{2}} \left(1 - \frac{1}{1+x^2}\right)^{-\frac{1}{2}} = x (1+x^2)^{-\frac{3}{2}} \cdot x^{-1} \cdot (1+x^2)^{\frac{1}{2}}$$

$$= (1+x^2)^{-1} = \frac{1}{1+x^2} = (\arctan x)'$$

$$f(0) = 0 \Rightarrow \forall x > 0, f(x) = \arctan x$$

$$f \text{ pair} \Rightarrow f(x) = |\arctan x|, x \in \mathbb{R}.$$

$$5) f(x) = \arctan\left(\frac{2x}{1-x^2}\right) \quad D_{\arctan} = \mathbb{R} \Rightarrow D_f = \mathbb{R} \setminus \{-1; 1\}$$

f dérivable sur D_f .

$$f'(x) = \left(\frac{2x}{1-x^2}\right)' \cdot \frac{1}{1 + \left(\frac{2x}{1-x^2}\right)^2} = \frac{2(1-x^2) + 4x^2}{(1-x^2)^2} \cdot \frac{(1-x^2)^2}{(1-x^2)^2 + 4x^2}$$

$$f'(x) = \frac{2(1+x^2)}{1-2x^2+x^4+4x^2} = 2 \cdot \frac{1+x^2}{(1+x^2)^2} = \frac{2}{1+x^2}$$

$$\forall x \in]-1; 1[\quad f(x) = 2 \arctan(x)$$

$$\text{en } +\infty \quad \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0 \Rightarrow f(x) = 2 \arctan x - \pi \quad \text{si } x > 1$$

$$\text{en } -\infty \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0, \arctan(-\infty) = -\frac{\pi}{2} \Rightarrow f(x) = 2 \arctan x + \pi \quad \text{si } x < -1$$

$$6) f(x) = \arcsin\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right) \quad \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} \in]-1; 1[, \forall x \in \mathbb{R}$$

f dérivable sur $\mathbb{R}$

$$f(x) = \arcsin \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} \quad f'(x) = \left(x(1+x^2)^{-\frac{1}{2}}\right)' \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{x^2}{1+x^2}}}$$

$$f'(x) = \left((1+x^2)^{-\frac{1}{2}} - \frac{1}{2} \cdot x \cdot 2x \cdot (1+x^2)^{-\frac{3}{2}}\right) \cdot \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{1+x^2}}}$$

$$f'(x) = \left[(1+x^2)^{-\frac{1}{2}} - x^2(1+x^2)^{-\frac{3}{2}}\right] (1+x^2)^{\frac{1}{2}} = 1 - \frac{x^2}{1+x^2} = \frac{1}{1+x^2}$$

$$f(0) = 0 \Rightarrow f(x) = \arctan x, \forall x \in \mathbb{R}$$

Exercice 4.19. Résoudre les équations et les inéquations suivantes après avoir donné leur domaine de validité :

1. $\ln(x-1) = \ln(3x-5)$

2. $\ln(x+4) + \ln(2x) = 2\ln(x)$

3. $\ln(x^2+x) = \ln(x+1)$

4. $\ln(x+1) + \ln(x-1) = \ln(3)$

5. $\ln(3-x) + 1 > 0$,

6. $\ln(x+1) + \ln(x-1) \leq \ln(3)$.

$$1) \quad \ln(x-1) = \ln(3x-5) \quad \mathcal{D} =]1; +\infty[\cap]\frac{5}{3}; +\infty[=]\frac{5}{3}; +\infty[\\ \forall x \in \mathcal{D}, (E) \Leftrightarrow x-1 = 3x-5 \Leftrightarrow x=2. \quad 2 \in \mathcal{D} \Rightarrow \mathcal{S} = \{2\}$$

$$2) \quad \ln(x+4) + \ln 2x = 2\ln x \quad \mathcal{D} =]0; +\infty[\\ \forall x \in \mathcal{D}, (E) \Leftrightarrow 2x(x+4) = x^2 \Leftrightarrow x^2 + 8x = 0. \quad \mathcal{S} = \emptyset$$

$$3) \quad \ln(x^2+x) = \ln(x+1) \quad \mathcal{D} =]1; +\infty[\\ \forall x \in \mathcal{D}, (E) \Leftrightarrow x^2+x = x+1 \Leftrightarrow x^2=1 \quad \mathcal{S} = \emptyset$$

$$4) \quad \ln(x+1) + \ln(x-1) = \ln(3) \quad \mathcal{D} =]1; +\infty[\\ \forall x \in \mathcal{D}, (E) \Leftrightarrow x^2-1 = 3 \Leftrightarrow x = \pm 2 \quad \mathcal{S} = \{2\}$$

$$5) \quad \ln(3-x) + 1 > 0 \quad \Leftrightarrow \ln(3-x) > -1 \quad \Leftrightarrow 3-x > e \\ \mathcal{D} =]-\infty; 3[\quad \Leftrightarrow x < 3-e$$

$$6) \quad \ln(x+1) + \ln(x-1) \leq \ln 3 \quad \mathcal{D} =]-\infty; -1[\cup]1; +\infty[\\ \forall x \in \mathcal{D}, (E) \Leftrightarrow x^2-1 \leq 3 \Leftrightarrow x^2 \leq 4 \Leftrightarrow x \in [-2; 2] \\ \mathcal{S} = [-2; -1[\cup]1; 2],$$

Exercice 4.20. Résoudre, dans $\mathbb{R}$, les équations et les inéquations suivantes après avoir donné leur domaine de validité :

25

1. $e^x - 2xe^x = 0$

2. $e^{2x} - 2e^x = 0$

3. $e^{2x} - e^{1-x} \leq 0$

4. $3^{2x+1} + 3^{2x} = 4^{x+1}$

1) $\mathcal{D} = \mathbb{R} \quad \Leftrightarrow e^x(1-2x) \leq 0 \quad \Leftrightarrow 1-2x \leq 0 \quad \Leftrightarrow x \geq \frac{1}{2}$

2) $e^{2x} - 2e^x = 0 \quad \Leftrightarrow e^x(e^x - 2) = 0 \quad \Leftrightarrow x = \ln 2$

3) $e^{2x} - e^{1-x} \leq 0 \quad \Leftrightarrow e^{2x} \leq e^{1-x} \quad \Leftrightarrow 2x \leq 1-x \quad \Leftrightarrow x \leq 1$

4) $3^{2x+1} + 3^{2x} = 4^{x+1}$

$\mathcal{D} = \mathbb{R}$

$\Leftrightarrow 3^{2x} [4] = 4^{x+1} \quad \Leftrightarrow 3^{2x} = 4^x$

$\Leftrightarrow e^{2x \ln 3} = e^{x \ln 4} \quad \Leftrightarrow 2x \ln 3 = x \ln 4 \quad \Leftrightarrow x = 0$

Exercice 4.21.

1. Montrer que, pour tout $x \in [-1, 1]$, on a : $\arccos(x) + \arcsin(x) = \frac{\pi}{2}$.

2. Montrer que, pour tout $x \in [-1, 1]$, on a : $\arccos(x) + \arccos(-x) = \pi$.

1) $\forall x \in]-1, 1[, \quad f'(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad f(x) = f(0) = \frac{\pi}{2}$
 $f(-1) = f(1) = \frac{\pi}{2}$

2) $\forall x \in]-1, 1[, \quad f'(x) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} = 0$

$\Rightarrow f(x) = f(0) = \pi$

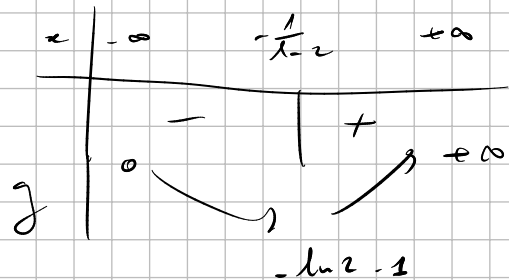
Exercice 4.22. Soit $f(x) = x^5 - 3x - 1$ et $g(x) = x^{2x} - 1$.

1. Montrer que $f(x) = 0$ admet une solution dans $[1, 2]$.

2. Montrer que $g(x) = 0$ admet une solution dans $[0, 1]$.

3. Montrer que $f(x) = g(x)$ admet une solution dans $]0, 2]$.

1) $\forall x \in \mathbb{R} \quad 2) \quad g(x) = x^{2x} - 1 \quad g'(x) = e^{x \ln 2} [1 + x \ln 2]$
 $\mathcal{D}_g = \mathbb{R}$



3) $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) - g(x) = f(0) - g(0) = 0$

$f(2) - g(2) = 2^5 - 6 - 1 - 2 \cdot 4 + 1 = 18 > 0$
 $+ \forall x \in]0, 2]$

$\begin{cases} f(1) - g(1) \\ = 1 - 3 - 1 - 2 + 1 \\ = -4 \end{cases}$

Exercice 4.23.

1. Montrer que $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln(x)}{x-1} = 1$.
2. En déduire les limites suivantes : $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\ln(1-t)}{t}$ et $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\ln(1-t^2)}{t}$.
3. Montrer que la fonction f définie sur $D = [0, +\infty[$ par l'expression suivante est continue sur D :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x \ln(x)}{x^2 - 1} & \text{si } x \in]0, +\infty[\setminus \{1\} \\ 0 & \text{si } x = 0 \\ \frac{1}{2} & \text{si } x = 1. \end{cases}$$

$$1. \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1 \quad \text{et} \quad \lim_{t \rightarrow 1} \ln t = 0 \Rightarrow \lim_{t \rightarrow 1} \frac{e^{\ln t} - 1}{\ln t} = 1$$

coores

$$\Rightarrow \lim_{t \rightarrow 1} \frac{t-1}{\ln t} = 1 \Rightarrow \lim_{t \rightarrow 1} \frac{\ln t}{t-1} = 1.$$

$$2) \quad \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\ln(1-t)}{t} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln(x)}{1-x} = -1$$

$$x = 1-t$$

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\ln(1-t)}{t} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln(x)}{\sqrt{1-x}} = \lim_{x \rightarrow 1} \sqrt{1-x} \frac{\ln x}{1-x} = 0 \quad (?)$$

$x = 1-t^2 \rightarrow 1$ $t = \sqrt{1-x}$

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\ln(1-t^2)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\ln(1-t)}{t} + \frac{\ln(1+t)}{t} = -1 + 1 = 0$$

$$3) \quad f(x) = \begin{cases} \frac{x \ln x}{x^2 - 1} & , \quad x \in]0, 1[\cup]1, +\infty[\\ 0 & , \quad x = 0 \\ \frac{1}{2} & , \quad x = 1 \end{cases}$$

f continue sur $]0, 1[\cup]1, +\infty[$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \ln x}{x^2 - 1} \stackrel{CC}{=} \lim_{x \rightarrow 0} -x \ln x = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x \ln x}{(x-1)(x+1)} = \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{x-1} = \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{2}$$

$$\begin{aligned}
 1. f(x) &= \begin{cases} \frac{\sin(x)}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases} & 2. f(x) &= \begin{cases} \frac{1 - \cos(x)}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases} \\
 3. f(x) &= \begin{cases} \frac{1 - \cos(x)}{x^2} & \text{si } x \neq 0 \\ \frac{1}{2} & \text{si } x = 0 \end{cases} & 4. f(x) &= \begin{cases} \frac{\sqrt{x+9} - 3}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ \frac{1}{6} & \text{si } x = 0 \end{cases} \\
 5. f(x) &= \begin{cases} \frac{\ln(1+x)}{e^x - 1} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases} & 6. f(x) &= \begin{cases} xE\left(x - \frac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ -1 & \text{si } x = 0 \end{cases}
 \end{aligned}$$

1) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$ d'oscillation. $\sin' = \cos$?

2) $f(x) = \frac{\cos(x) - 1}{x} \xrightarrow{x \rightarrow 0} -\sin(0) = 0 \Rightarrow f$ continue

3) On admet $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(x) - 1}{x^2} = -\frac{1}{2}$ et f continue...

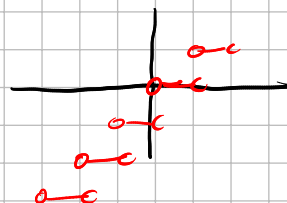
4) $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x+9-9}{x(\sqrt{x+9})} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{x+9}} = \frac{1}{6}$

5) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} \cdot \frac{e^x - 1}{x} = 1 \times 1$ ($\times$ d'osc)

6) $\lim_{x \rightarrow 0} xE\left(x - \frac{1}{x}\right)$

$x = \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N} \quad \frac{1}{n} \in \left(\frac{1}{n} - n\right) = \frac{-n}{n} \rightarrow -1$ pas absorbé...

$\lim_{x \rightarrow 0} xE\left(x - \frac{1}{x}\right) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} E\left(\frac{1}{t} - t\right)$
 $= \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{E(-t)}{t} = -1$



$\frac{-t}{t} \leq \frac{E(-t)}{t} \leq \frac{-t+1}{t}$ th encadrement

$\lim_{x \rightarrow 0} xE\left(x - \frac{1}{x}\right) = \lim_{t \rightarrow +\infty} -\frac{1}{t} E\left(-\frac{1}{t} + t\right) = -1.$

$\frac{t-1}{t} \leq \frac{E\left(t - \frac{1}{t}\right)}{t} \leq \frac{t}{t}$ th enc

Exercice 4.25. Dans chacun des cas suivants, dire si la fonction f se prolonge par continuité au point x_0 proposé :

28

1. $f(x) = \frac{\sin(x)}{\sqrt{1+x}-1}$ et $x_0 = 0$, 2. $f(x) = \frac{x-2}{\sqrt{x}-\sqrt{2}}$ et $x_0 = 2$,

3. $f(x) = \frac{\sin(\pi x)}{\ln(x)}$ et $x_0 = 1$, 4. $f(x) = \frac{x(e^x - e^{-x})}{1 - \cos(x)}$ et $x_0 = 0$.

1) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{\sqrt{1+x}-1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sqrt{1+x}-1} \cdot \frac{\sin x}{x} = \frac{1}{\frac{1}{2}} \times 1 = 2$

2) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-2}{\sqrt{x}-\sqrt{2}} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x}+\sqrt{2}}{1} = 2\sqrt{2}$ $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{1-\cos x}{x-2} = \frac{1}{2}$

3) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin \pi x}{\ln x} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin \pi x}{x} \cdot \frac{x}{\ln x} = \pi$

4) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(e^x - e^{-x})}{1 - \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{1 - \cos x} \left(\frac{e^x - e^{-x}}{x} \right) = 2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{2} \cdot \frac{e^x - e^{-x}}{x}$
 $= 2 \times 2 = 4$

Exercice 4.26. Soit f la fonction définie par $f(x) = \arccos\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)$.

- Déterminer le domaine de définition $\mathcal{D}_f$ et préciser la parité de f .
- Calculer $f'(x)$ sur $]0, +\infty[$ pour en déduire une expression simple de f d'abord sur $]0, +\infty[$ puis sur $] -\infty, 0]$.
- Étudier la dérivabilité de f en 0.
- Tracer le graphe de f .

1) $\mathcal{D}_f = \{x \in \mathbb{R}, \frac{1-x^2}{1+x^2} \in [-1, 1]\} = \mathbb{R}$. $\forall x \in \mathbb{R} \quad |1-x^2| \leq |1+x^2|$
 $\Rightarrow \frac{1-x^2}{1+x^2} \in [-1, 1], x \in \mathbb{R}$
 f est pair

arccos dérivable sur $] -1, 1[$
 $\frac{1-x^2}{1+x^2} = 1 \Leftrightarrow x=0 \Rightarrow f$ dérivable sur $\mathbb{R}^*$
 $-1 < \frac{1-x^2}{1+x^2} < 1 \Leftrightarrow -1-x^2 < 1-x^2 < 1+x^2$
 $\Leftrightarrow -2 < 0 \text{ et } x^2 > 0$

2) $\forall x > 0$,

$f'(x) = -\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)' \cdot \left(1 - \left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)^2\right)^{-\frac{1}{2}} = -\left(-1 + \frac{2}{1+x^2}\right)' \cdot \left(1 - \left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)^2\right)^{-\frac{1}{2}}$
 $f'(x) = \frac{4x}{(1+x^2)^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{\frac{(1+x^2)^2 - (1-x^2)^2}{(1+x^2)^2}}} = \frac{4x}{(1+x^2)^2} \cdot \frac{1+x^2}{\sqrt{2x^2 x^2}} = \frac{2}{1+x^2}$

$f(0) = \arccos(1) = 0 \Rightarrow f(x) = \arctan x, \forall x \geq 0$

$f(x) = \begin{cases} 2 \arctan x, & x \geq 0 \\ -2 \arctan x, & x < 0 \end{cases}$

3) Dérivabilité en 0

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{\arccos\left(\frac{1+x^2}{1-x^2}\right)}{x} \xrightarrow{x \rightarrow 0} ?$$

29

Si $x > 0$, $f'(x) = \frac{2}{1+x^2} \xrightarrow{x \rightarrow 0} 2$

Si $x < 0$, $f'(x) = \frac{-2}{1+x^2} \xrightarrow{x \rightarrow 0} -2$

} f non dérivable en 0

4) Exercice

Exercice 4.27. Soit f la fonction définie par

$$f(x) = \begin{cases} e^{-x} + 1 & \text{si } x \leq 0 \\ 2 + x \ln(x) & \text{si } 0 < x. \end{cases}$$

1. Étudier la continuité et la dérivabilité de f en 0.
2. Calculer $f'(x)$ en tout point x où f est dérivable.
3. Étudier les variations et tracer le graphe de f .

1) f continue sur $\mathbb{R}^+$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} e^{-x} + 1 = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} 2 + x \ln x = 2 \quad \left. \vphantom{\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)} \right\} f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R})$$

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \begin{cases} \frac{1+e^{-x}}{x} \xrightarrow{x \rightarrow 0} -1 \\ \frac{2+x \ln x}{x} \xrightarrow{x \rightarrow 0} -\infty \end{cases} \quad (+x \text{ d'acc de exp})$$

f non dérivable en 0

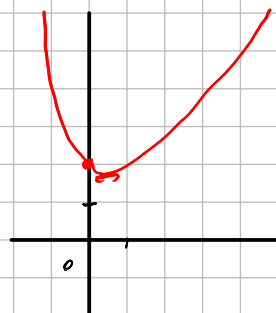
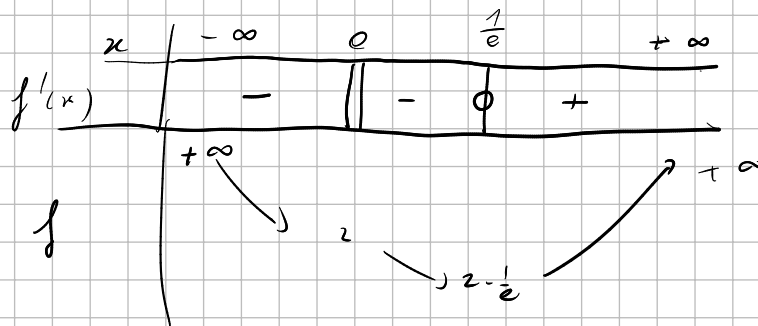
2)

Si $x < 0$, $f'(x) = -e^{-x} < 0$

Si $x > 0$, $f'(x) = \ln x + 1$

$$f(e) = 2 + e \ln(e) = 2 + e$$

$$f\left(\frac{1}{e}\right) = 2 + \frac{1}{e} \ln\left(\frac{1}{e}\right) = 2 - \frac{1}{e}$$

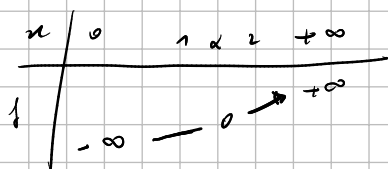


Exercice 4.28. Soit f la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par $f(x) = x - 2 + \ln(x)$.

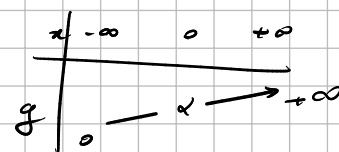
1. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution dans $]1, 2[$.
2. Montrer que f est bijective de $]0, +\infty[$ sur $\mathbb{R}$. On note g sa réciproque.
3. Étudier la continuité et dresser le tableau de variations de g .
4. Tracer les graphes de f et g dans un même repère orthonormé.

1. f est stricte sur $]1, 2[$, $f \in \mathcal{C}^0$, $f(1) = -1$, $f(2) = \ln 2 + 0$. $\forall x \in]1, 2[$

2. f stricte + $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}) \Rightarrow f$ bij de $]0, +\infty[$ sur $f(\mathbb{R})$



3. $f \in \mathcal{C}^0(]0, +\infty[) \Rightarrow g \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R})$, f et g m va



4.

