

MIASH Analyse 1 Partie 3 : Fonctions réelles

Exercice 3.1. En justifiant les calculs, déterminer, lorsqu'elles existent, les limites suivantes :

1. $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 + 1}{x + 1}$

2. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - \sqrt{x}}{x - 1}$

3. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 1}$

4. $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x - 4}{\sqrt{x} - 2}$

5. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{1 - x}{x^2 - 4}$

6. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - 1}{x}$

1) $(-1)^3 + 1 = 0 \Rightarrow x + 1 \mid x^3 + 1$

$$\begin{array}{r} x^3 + 1 \\ x^3 + x^2 \\ \hline -x^2 + 1 \\ -x^2 + x \\ \hline x + 1 \end{array}$$

$$x^3 + 1 = (x + 1)(x^2 - x + 1)$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 + 1}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - x + 1}{1} = 3$$

2) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - \sqrt{x}}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x} - 1)}{(\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} + 1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} + 1} = \frac{1}{2}$

3) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x - 2)(x - 1)}{(x + 1)(x - 1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - 2}{x + 1} = -\frac{1}{2}$

4) $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x - 4}{\sqrt{x} - 2} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{(\sqrt{x} - 2)(\sqrt{x} + 2)}{\sqrt{x} - 2} = \lim_{x \rightarrow 4} (\sqrt{x} + 2) = 6$

5) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{1 - x}{x^2 - 4} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1 - x}{(x - 2)(x + 2)}$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{1 - x}{(x - 2)(x + 2)} = \frac{-1}{0^+} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{1 - x}{(x - 2)(x + 2)} = \frac{-1}{0^-} = +\infty$$

6) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + x - 1}{x(\sqrt{1+x} + 1)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{1+x} + 1} = \frac{1}{2}$

Exercice 3.2. En justifiant les calculs, déterminer, lorsqu'elles existent, les limites suivantes :

2

1. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \cos(1+x^2)}{1+x^2}$

2. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^3 + x^2}{x^2 - 1} - x \right)$

3. $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (\sqrt{x^2 + x} - x)$

4. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \cos \left(\frac{\pi x - 1}{2x + 1} \right)$.

1) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\cos(1+x^2)}{\sqrt{x}} = 0$ $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x\sqrt{x}}{1+x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{x}(\frac{1}{x\sqrt{x}} + 1)} = 0$
 $\Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \cos(1+x^2)}{1+x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\cos(1+x^2)}{\sqrt{x}} \frac{x\sqrt{x}}{1+x^2} = 0$

2) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^3 + x^2}{x^2 - 1} - x \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^3 + x^2 - x^3 + x}{x^2 - 1} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + x}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 + \frac{1}{x}}{1 - \frac{1}{x^2}} = 1$

3) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + x} - x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + x - x^2}{\sqrt{x^2 + x} + x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x(\sqrt{1 + \frac{1}{x}} + 1)} = \frac{1}{2}$
 $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 + x} - x) = +\infty$

4) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \cos \frac{\pi x - 1}{2x + 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \cos \left(\frac{\frac{\pi}{2} - \frac{1}{x}}{2 + \frac{1}{x}} \right) = \cos \frac{\pi}{2} = 0$

Exercice 3.3. On rappelle que $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$.

3

1. Montrer que $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$.

2. Calculer les limites suivantes :

(a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(2x)}{\sin(3x)}$

(b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2\sin(x) - \sin(2x)}{x^3}$

(c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \sin(x)}{1 - \cos(x)}$

(d) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} \sin\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$.

1) $\frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1 - \cos^2 x}{x^2(1 + \cos x)} = \frac{\sin^2 x}{x^2(1 + \cos x)} \xrightarrow{x \rightarrow 0} \frac{1}{2}$
 $\forall x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$

2) a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(2x)}{\sin(3x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(2x)}{2x} \cdot \frac{3x}{\sin(3x)} \times \frac{2}{3} = \frac{2}{3}$

b) $\frac{2\sin(x) - \sin(2x)}{x^3} = \frac{2\sin(x) - 2\sin x \cos x}{x^3} = \frac{2\sin x}{x} \left[\frac{1 - \cos x}{x^2} \right]$
 $\forall x \neq 0, \quad \xrightarrow{x \rightarrow 0} 2 \times 1 \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

c) $\frac{x \sin x}{1 - \cos x} = \frac{x^2}{1 - \cos x} \cdot \frac{\sin x}{x} \xrightarrow{x \rightarrow 0} \frac{1}{2} \times 1$

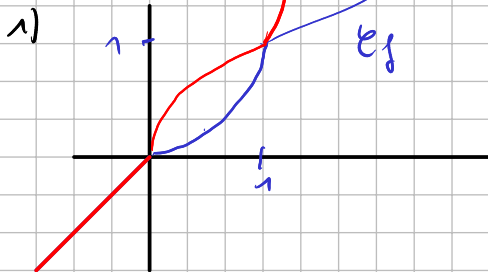
d) $\sqrt{x} \sin \frac{1}{\sqrt{x}} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} \sin\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} \sin t = 1$
 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} = 0$

Exercice 3.4. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par

4

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x < 0 \\ x^2 & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ \sqrt{x} & \text{si } 1 < x. \end{cases}$$

1. La fonction f est-elle continue?
2. Montrer que f est bijective et déterminer f^{-1} .
3. Tracer les graphes de f et de f^{-1} dans un même repère orthonormé.



Il se s'agit que f soit continue sur $\mathbb{R}$
 sur $]-\infty; 0[\cup]0; 1[\cup]1; +\infty[$
 f est exprimée par une fco de
 référence continue donc est continue

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0 = f(0) \quad \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 1 = f(1)$$

f continue en 0 et 1 donc sur $\mathbb{R}$.

2) f stricte et continue de $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ donc f bij de $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, f(x) = y \Leftrightarrow f^{-1}(y) = x$$

$$\forall y \in \mathbb{R}$$

$$f(x) = y \Leftrightarrow \begin{cases} x = y & \text{si } x < 0 \\ x^2 = y & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ \sqrt{x} = y & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = y & \text{si } y < 0 \\ x = \sqrt{y} & \text{si } 0 \leq y \leq 1 \\ x = y^2 & \text{si } y > 1 \end{cases} = f^{-1}(y)$$

3) C_f et $C_{f^{-1}}$ sont symétriques % $y = x$

Exercice 3.5. Soit $n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$ et f_n la fonction définie sur $[1, +\infty[$ par $f_n(x) = x^n - x - 1$.

5

1. Vérifier que f_n est strictement croissante sur $[1, +\infty[$.
2. Montrer qu'il existe un unique $x_n \in]1, +\infty[$ tel que $f_n(x_n) = 0$.
3. Montrer que $f_{n+1}(x_n) > 0$.
4. En déduire que la suite (x_n) est décroissante et qu'elle converge vers une limite ℓ .
5. On suppose que $\ell > 1$, calculer la limite de x_n^n lorsque n tend vers $+\infty$.
6. En déduire la limite de la suite (x_n) .

1) dérivée ?

$$f'_n(x) = nx^{n-1} - 1 > 0 \quad \text{si } x > 1 \text{ et } n \geq 2$$

f st $\nearrow$ sur $]1; +\infty[$

2) $f_n(1) = -1$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x) = +\infty$, f_n st $\nearrow$, f_n continue sur $[1; +\infty[$
Corollaire TVI, $f_n(x) = 0$ admet unique soln $\exists$ dans $]1; +\infty[$

3) $f_n(x_n) = 0$

$$f_{n+1}(x_n) = x_n^{n+1} - x_n - 1 > x_n^n - x_n - 1 = 0 \quad \text{car } x_n > 1 \text{ et } x_n^{n+1} > x_n^n$$

4) $f_{n+1}(x_{n+1}) = 0$ et $f_{n+1}(x_n) > 0$. f_{n+1} st $\nearrow$ sur $]1; +\infty[$

donc $x_{n+1} < x_n \Rightarrow (x_n) \searrow$

$(x_n) \searrow$ minorée par 1 CV vers $\ell \geq 1$

5) si $\ell > 1$ $\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} 0 = 0$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} x_n^n - x_n - 1 = 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} x_n^n = \lim_{n \rightarrow +\infty} x_{n+1} = \ell + 1$$

et $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = \ell > 1$

$$x_n^n = \exp(n \ln(x_n))$$

$$x_n^n = 1 + x_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1 + \ell > 2$$

6)

Mais $\ln x_n^n = n \ln x_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty \times \underbrace{\ln \ell}_{> 0} = +\infty \Rightarrow \exp \ln x_n^n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$
 $\exp \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R})$

$$\left. \begin{array}{l} 5) : \lim_{n \rightarrow +\infty} x_n^n = 1 + \ell \\ 6) : \lim_{n \rightarrow +\infty} x_n^n = +\infty \end{array} \right\} \text{contradiction}$$

$$\text{donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = 1.$$

Exercice 3.6. Déterminer les domaines de définition et de dérivabilité de la fonction réelle f et calculer la dérivée f' dans les cas suivants :

6

1. $f(x) = \frac{1+x}{1-x}$

2. $f(x) = \sqrt{1+2x^3}$

3. $f(x) = \frac{\sin x}{1+\cos x}$

$(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$

4. $f(x) = \frac{x}{1+x^2}$

5. $f(x) = \frac{1}{(1+x^2)^2}$

6. $f(x) = \sqrt{2\sin(x)-1}$

7. $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$

8. $f(x) = \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$

9. $f(x) = \frac{1}{1-2\cos(x)}$

1) f rationnelle définie et dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ $f'(x) = \frac{1-x+1+x}{(1-x)^2} = \frac{2}{(1-x)^2}$

2) $D_f = [-\sqrt[3]{\frac{1}{2}}; +\infty[$ f dérivable sur $]-\sqrt[3]{\frac{1}{2}}; +\infty[$

$f(x) = (1+2x^3)^{\frac{1}{2}}$ $f'(x) = 6x^2 \cdot \frac{1}{2} \cdot (1+2x^3)^{-\frac{1}{2}}$

3) $f(x) = \frac{\sin x}{1+\cos x}$ $D_f = \{x \in \mathbb{R}, 1+\cos x \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \{\pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$

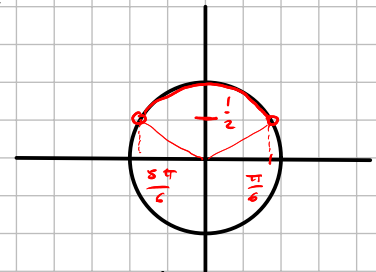
f Q. de $\sin$ dér sur D_f donc dér sur D_f

$f'(x) = \frac{\cos x (1+\cos x) + \sin x (-\sin x)}{(1+\cos x)^2} = \frac{\cos x + \cos^2 x - \sin^2 x}{(1+\cos x)^2} = \frac{1}{1+\cos x}$

4) $f(x) = \frac{x}{1+x^2}$ $D_f = D_{f'} = \mathbb{R}$ $f'(x) = \frac{1+x^2-2x^2}{(1+x^2)^2} = \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}$

5) $f(x) = \frac{1}{(1+x^2)^2} = (1+x^2)^{-2}$ $D_f = D_{f'} = \mathbb{R}$

$f'(x) = -2 \cdot 2x \cdot (1+x^2)^{-3}$



6) $f(x) = \sqrt{2\sin x - 1}$ $2\sin x - 1 \geq 0 \Leftrightarrow \sin x \geq \frac{1}{2}$

$D_f = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left[\frac{\pi}{6} + 2k\pi, \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \right]$

f dérivable sur $]0; +\infty[$ et $2\sin x - 1 = 0 \Leftrightarrow x \in \left\{ \frac{\pi}{6} + 2k\pi; \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$

f dérivable sur $\bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left] \frac{\pi}{6} + 2k\pi; \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \right[$.

$f(x) = (2\sin x - 1)^{\frac{1}{2}}$ $f'(x) = \frac{1}{2} \cdot 2\cos x \cdot (2\sin x - 1)^{-\frac{1}{2}}$

7) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$ $D_f =]-\infty; -1[\cup]1; +\infty[= D_{f'}$

$f(x) = (x^2-1)^{-\frac{1}{2}}$ $f'(x) = \frac{1}{2} \cdot 2x \cdot (x^2-1)^{-\frac{3}{2}}$

$$8) f(x) = \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$$

$$D_f = [-1; 1[$$

$$D_{f'} =]-1; 1[$$

$$f'(x) = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1+x}{1-x}\right)^{-\frac{1}{2}} \cdot \left(\frac{1+x}{1-x}\right)^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{(1-x)^2} \cdot \left(\frac{1+x}{1-x}\right)^{-\frac{1}{2}}$$

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x} (1-x)^{\frac{3}{2}}}$$

$$9) f(x) = \frac{1}{1-2\cos x}$$

$$D_f = \mathbb{R} \setminus \left(\left\{ \frac{\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\} \cup \left\{ \frac{2\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\} \right)$$

$$D_f = D_{f'} \quad (\text{Q. de } f' \text{ d'ér.})$$

$$f'(x) = \frac{-2\sin x}{(1-2\cos x)^2}$$

Exercice 3.7. Déterminer les domaines de continuité et de dérivabilité de la fonction f dans les cas suivants :

$$1. f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 + \sqrt{x^2}}{|x|} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0. \end{cases} \quad 2. f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

On calculera la dérivée de f sur le domaine approprié.

1) f continue sur $\mathbb{R}^*$

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2 + \sqrt{x^2}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2 + x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} x + 1 = 1. \\ \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x^2 + \sqrt{x^2}}{-x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x^2 - x}{-x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} 1 - x = 1. \end{aligned} \right\} f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R})$$

$$T_f(x) : \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{\frac{x^2 + \sqrt{x^2}}{|x|} - 1}{x} = \frac{x^2 + \sqrt{x^2} - |x|}{x|x|}$$

$$\left. \begin{aligned} \text{si } x > 0, T_0(x) &= \frac{x^2}{x^2} = 1 \rightarrow 1 \\ \text{si } x < 0, T_0(x) &= \frac{x^2}{x^2} = 1 \rightarrow 1 \end{aligned} \right\} f \text{ dérivable en } 0. \quad f \text{ dérivable sur } \mathbb{R}^* \Rightarrow \mathcal{D}_{f'} = \mathbb{R}$$

$$\mathcal{D}_{f'} = \mathbb{R}^*.$$

$$2) f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases} \quad f \text{ impaire.}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} x^2 \sin \frac{1}{x} = 0 = f(0) \Rightarrow f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R})$$

$$T_f(x) = \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = x \sin \frac{1}{x} \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0 \Rightarrow f'(0) = 0. \quad \mathcal{D}_{f'} = \mathbb{R}$$

$$f'(x) = 2x \sin \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} \cdot x^2 \cdot \cos \frac{1}{x} = 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x} \quad \text{sur } \mathbb{R}^*$$

$$f'(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0 \\ 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x} & \text{sur } \mathbb{R}^* \end{cases}$$

Exercice 3.8. Déterminer le réel a de sorte que la fonction f définie par l'expression suivante soit continue sur $\mathbb{R}$:

9

$$f(x) = \begin{cases} x \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x < 0 \\ a & \text{si } x = 0 \\ \frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x} & \text{si } 0 < x. \end{cases}$$

La fonction f est-elle alors dérivable sur $\mathbb{R}$? On calculera $f'(x)$ au point x où f est dérivable.

1) $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} x \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0 \Rightarrow$ L'unique valeur possible de $a = 0$

$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2}{(\sqrt{1+x^2}+1)x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{\sqrt{1+x^2}+1} = 0$

f continue en 0 si: $a=0$

f continue sur $\mathbb{R}^*$ par opérations sur les fct continues

2) f dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et alors

$$f'(x) = \begin{cases} \sin\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x^2} \cos\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x < 0 \\ \frac{\frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}} x - \sqrt{1+x^2} + 1}{x^2} = \frac{x^2 - 1 - x^2 + \sqrt{1+x^2}}{x^2} = \frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x^2} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

f dérivable en 0? $T(x) = \frac{f(x) - f(0)}{x} =$

Si $x > 0$ $T(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right)$

qui n'a pas de limite en 0

donc f non dérivable en 0.

Exercice 3.9. Soit la fonction f définie sur $[-1, +\infty[$ par $f(x) = \sqrt{x^2(x+1)}$.

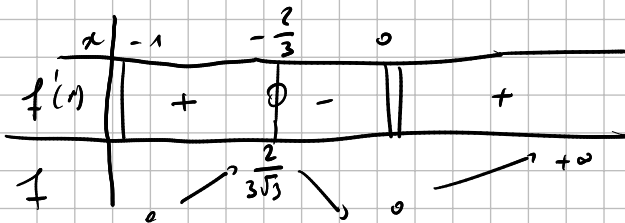
1. Étudier la dérivabilité de f en -1 et en 0 .
2. Calculer $f'(x)$ pour $x \neq -1$ et $x \neq 0$. En déduire les variations de f .
3. Calculer la limite de f en $+\infty$ puis dresser le tableau des variations de f .
4. Tracer le graphe de f .
5. Montrer que la restriction g de f à $[0, +\infty[$ réalise une bijection de $[0, +\infty[$ sur $[0, +\infty[$.
6. Justifier que g^{-1} est dérivable sur $[0, +\infty[$. Quelle est la valeur de $(g^{-1})'_d(0)$?

1) $f \in \mathcal{C}^0([-1; +\infty[)$ f dérivable sur $]-1; 0[\cup]0; +\infty[$ (o.k.)

en 0 $T_0(x) = \frac{\sqrt{x^2(x+1)}}{x}$ si $x > 0$ $T(x) = \frac{\sqrt{x+1}}{x} \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} +\infty$
 si $x < 0$ $T(x) = \frac{-\sqrt{x+1}}{x} \xrightarrow{x \rightarrow 0^-} -\infty$ } Non dérivable en 0

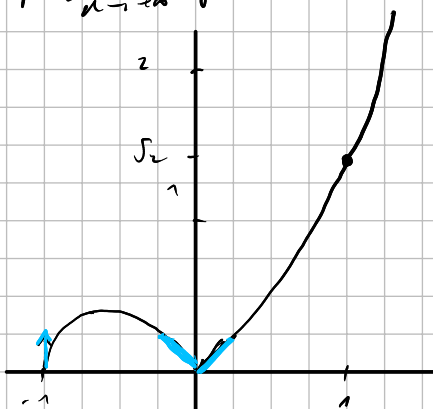
en -1^+ $T_{-1}(x) = \frac{f(x) - f(-1)}{x - (-1)} = \frac{\sqrt{x^2(x+1)}}{x+1} = \sqrt{\frac{x^2}{x+1}} \xrightarrow{x \rightarrow -1^+} +\infty$ Non dérivable en -1

2) $f'(x) = \left((x^2(x+1))^{\frac{1}{2}} \right)' = \frac{1}{2} [2x(x+1) + x^2] (x^2(x+1))^{-\frac{1}{2}} = \frac{x(3x+1)}{2\sqrt{x^2(x+1)}}$



$$f\left(-\frac{1}{3}\right) = \sqrt{\frac{4}{9} \cdot \frac{1}{3}} = \sqrt{\frac{4}{27}} = \frac{2}{3\sqrt{3}}$$

3) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$



4) $\left. \begin{array}{l} g \in \mathcal{C}^1([0; +\infty[) \\ g \text{ str } \nearrow \text{ sur } [0; +\infty[\\ g([0; +\infty[) = [0; +\infty[\end{array} \right\} \begin{array}{l} g \text{ bij de } [0; +\infty[\\ \text{dans } [0; +\infty[\end{array}$

6) g dérivable sur $]0; +\infty[$ et $g'(x) \neq 0 \forall x \in]0; +\infty[$
 g dérivable en 0 et $g'(0) = 1$.

$$(g^{-1})'_d(0) = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{g^{-1}(y) - g^{-1}(0)}{y} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{g^{-1}(y)}{y}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\frac{g(x)}{x}} = \frac{1}{1} = 1$$

$\forall x > 0, \forall y > 0$

$\left. \begin{array}{l} g(x) = y \Leftrightarrow g^{-1}(y) = x \\ x \rightarrow 0 \Leftrightarrow y \rightarrow 0 \end{array} \right\} \lim_{y \rightarrow 0} \frac{g^{-1}(y)}{y} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{g(x)} = 1$

donc g dérivable

Exercice 3.10. Étudier la fonction f dans les cas suivants :

1. $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$

2. $f(x) = \frac{x^2 - x - 1}{x - 2}$

3. $f(x) = \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{x}$.

On précisera le domaine de définition, les limites aux bornes et branches infinies, sens de variation et convexité et on tracera le graphe de f .

1) $f(x) = \frac{x+1}{x-1} = 1 + \frac{2}{x-1}$ $\mathcal{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{1\} = \mathcal{D}_{f'}$

$f'(x) = -\frac{2}{(x-1)^2}$
 $f''(x) = \frac{4}{(x-1)^3} > 0$

$y=0$ A. H.
 $x=1$ A. V.

Graph of $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$ showing a vertical asymptote at $x=1$ and a horizontal asymptote at $y=0$. The function is concave up (CCU) for $x < 1$ and concave down (CVX) for $x > 1$.

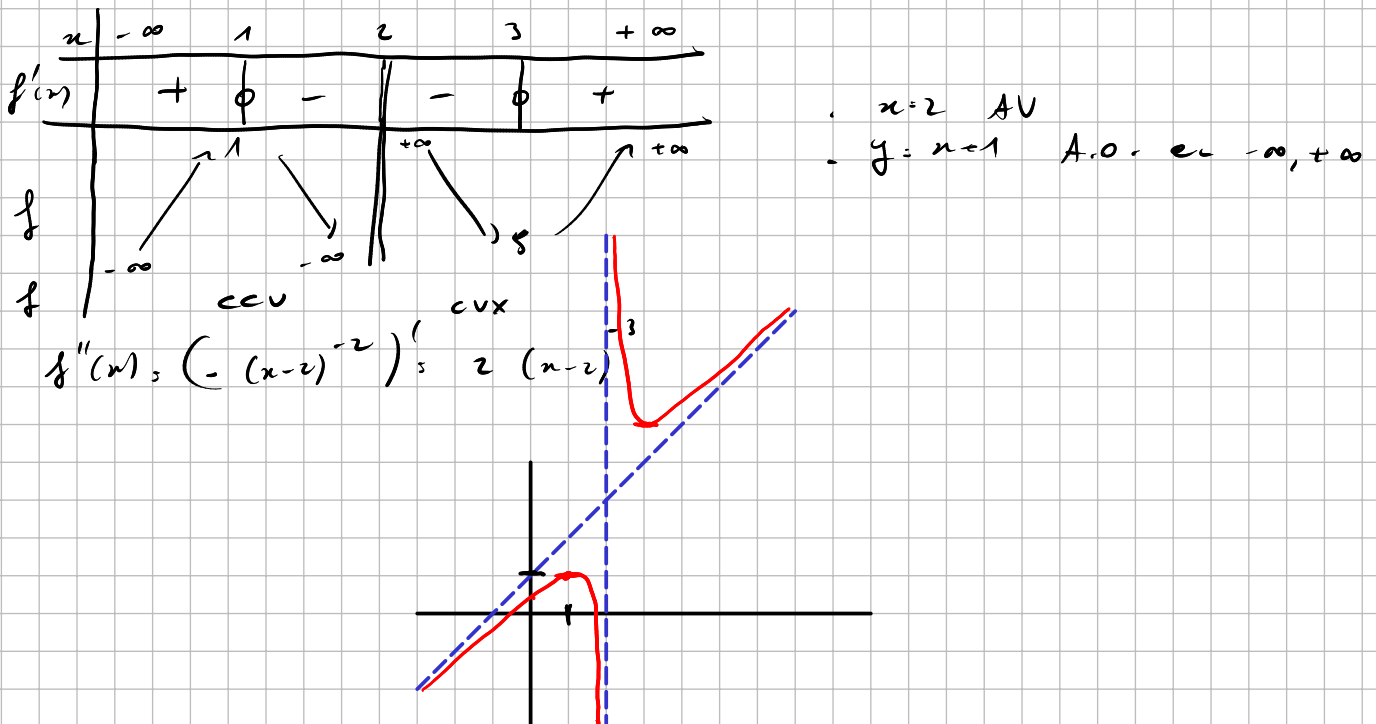
2) $f(x) = \frac{x^2 - x - 1}{x - 2} = x + 1 + \frac{1}{x - 2}$

$f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R} \setminus \{2\})$

$f'(x) = 1 - \frac{1}{(x-2)^2} = \frac{(x-2)^2 - 1}{(x-2)^2} = \frac{(x-3)(x-1)}{(x-2)^2}$

$f''(x) = \frac{2(x-2)}{(x-2)^3} = \frac{2}{(x-2)^2}$

Graph of $f(x) = \frac{x^2 - x - 1}{x - 2}$ showing a vertical asymptote at $x=2$ and a slant asymptote at $y=x+1$. The function is concave up (CCU) for $x < 2$ and concave down (CVX) for $x > 2$.



$$3) \quad f(x) = \frac{\sqrt{x^2-1}}{x} = \frac{\sqrt{(x-1)(x+1)}}{x}$$

12

$$\mathcal{D}_f =]-\infty; -1] \cup [1; +\infty[$$

$$f \in \mathcal{C}^1(\mathcal{D}_f)$$

$$f \text{ dérivable sur }]-\infty; -1[\cup]1; +\infty[$$

$$f'(x) = \frac{\frac{2x}{2\sqrt{x^2-1}} \cdot x - \sqrt{x^2-1}}{x^2} = \frac{x^2 - (x^2-1)}{x^2 \sqrt{x^2-1}} = \frac{1}{x^2 \sqrt{x^2-1}}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \dots = 1 \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -1 \quad x > 1$$

x	-\infty	-1	1	+\infty
f'(x)	+		X	+
f	↗	0	X	↘ 1

$$\left. \begin{array}{l} x=1 \text{ AH } +\infty \\ x=-1 \text{ AH } -\infty \end{array} \right\} = \frac{f(x) - f(1)}{x-1} = \frac{\sqrt{x^2-1}}{x(x-1)} = \frac{\sqrt{x+1}}{x\sqrt{x-1}} \xrightarrow{x \rightarrow 1} +\infty$$

Non dér en 1 et -1

Exercice 3.11. Déterminer les domaines de définition des fonctions f , g , $f \circ g$ et $g \circ f$ ainsi que les expressions des composées $f \circ g$ et $g \circ f$ dans les cas suivants :

1. $f(x) = \sqrt{x}$ et $g(x) = x^2 - 2x + 4$, 2. $f(x) = \sqrt{x}$ et $g(x) = x^2 + x - 2$,

3. $f(x) = \frac{1+x}{1-x}$ et $g(x) = \frac{x}{1-x}$, 4. $f(x) = \frac{x}{1+x^2}$ et $g(x) = \frac{1}{x}$.

1) $f(x) = \sqrt{x}$ $g(x) = x^2 - 2x + 4$ $\mathcal{D}_f = [0; +\infty[$ $\mathcal{D}_g = \mathbb{R}$
 $f \circ g(x) = f(g(x)) = \sqrt{x^2 - 2x + 4}$ $\mathcal{D}_{f \circ g} = \{x \in \mathbb{R}, x^2 - 2x + 4 \geq 0\} = \mathbb{R}$
 $\Delta = 4 - 16 < 0 \Rightarrow \forall x \in \mathbb{R}, g(x) > 0$. $\mathcal{D}_{g \circ f} = \{x \in \mathbb{R}, x \geq 0\} = \mathbb{R}_+$
 $g \circ f(x) = g(f(x)) = \sqrt{x}^2 - 2\sqrt{x} + 4 = x - 2\sqrt{x} + 4$

2) $f(x) = \sqrt{x}$ $g(x) = x^2 + x - 2 = (x-1)(x+2)$ $g(x) \geq 0 \Leftrightarrow x \in]-\infty; -2] \cup [1; +\infty[$
 $\mathcal{D}_{f \circ g} =]-\infty; -2] \cup [1; +\infty[$, $f \circ g(x) = \sqrt{x^2 + x - 2}$
 $\mathcal{D}_{g \circ f} = \mathbb{R}_+$, $g \circ f(x) = x + \sqrt{x} - 2$

3) $f(x) = \frac{1+x}{1-x}$; $g(x) = \frac{x}{1-x}$ $\mathcal{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{1\}$ $\mathcal{D}_g = \mathbb{R} \setminus \{1\}$
 $\mathcal{D}_{f \circ g} = \{x \in \mathcal{D}_g, g(x) \in \mathcal{D}_f\} = \{x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}, \frac{x}{1-x} \neq 1\}$ $\frac{x}{1-x} = 1 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$
 $= \mathbb{R} \setminus \{\frac{1}{2}; 1\}$ $f \circ g(x) = \frac{1 + \frac{x}{1-x}}{1 - \frac{x}{1-x}} = \frac{1}{1-2x}$
 $\mathcal{D}_{g \circ f} = \{x \in \mathcal{D}_f, f(x) \in \mathcal{D}_g\} = \{x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}, \frac{1+x}{1-x} \neq 1\} = \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$
 $\frac{1+x}{1-x} = 1 \Leftrightarrow 1+x = 1-x \Leftrightarrow x = 0$ $g \circ f(x) = \frac{\frac{1+x}{1-x}}{1 - \frac{1+x}{1-x}} = \frac{1+x}{-2x} = -\frac{1+x}{2x}$

4) $f(x) = \frac{x}{1+x^2}$ $g(x) = \frac{1}{x}$ $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$, $\mathcal{D}_g = \mathbb{R} \setminus \{0\}$
 $\mathcal{D}_{f \circ g} = \{x \in \mathcal{D}_g, g(x) \in \mathcal{D}_f\} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$
 $f \circ g(x) = \frac{\frac{1}{x}}{1 + (\frac{1}{x})^2} = \frac{\frac{1}{x}}{\frac{x^2+1}{x^2}} = \frac{x^2}{x(x^2+1)} = \frac{x}{1+x^2}$
 $\mathcal{D}_{g \circ f} = \{x \in \mathcal{D}_f, f(x) \in \mathcal{D}_g\} = \{x \in \mathbb{R}, \frac{x}{1+x^2} \neq 0\} = \mathbb{R}^*$
 $g \circ f(x) = \frac{1}{\frac{x}{1+x^2}} = \frac{1+x^2}{x}$

Exercice 3.12. Soit $f(x) = \frac{x}{1+x}$. On note $f^1 = f$ et, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $f^{n+1} = f \circ f^n$.

14

1. Donner le domaine de définition de f .
2. Montrer que f est strictement croissante sur $]-\infty, -1[$ et sur $]-1, +\infty[$.
3. Calculer f^2 et f^3 après avoir déterminé leur domaine de définition.
4. Proposer une expression de $f^n(x)$ et prouver celle-ci par récurrence.

1) $\mathcal{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$

2) $f(x) = 1 - \frac{1}{1+x}$ Σ de $f \circ f \nearrow$ sur $]-\infty, -1[$ et $]-1, +\infty[$

3) $\mathcal{D}_{f^2} = \left\{ x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}, \frac{x}{1+x} \neq -1 \right\} = \left\{ x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}, x \neq -\frac{1}{2} \right\} = \mathbb{R} \setminus \left\{ -\frac{1}{2}, -1 \right\}$
 $f^{(2)}(x) = \frac{\frac{x}{1+x}}{1 + \frac{x}{1+x}} = \frac{x}{1+2x}$

$\mathcal{D}_{f^3} = \left\{ x \in \mathcal{D}_{f^2}, f^{(2)}(x) \in \mathcal{D}_f \right\} = \left\{ x \in \mathbb{R} \setminus \left\{ -1, -\frac{1}{2} \right\}, \frac{x}{1+2x} \neq -1 \right\}$

$\mathcal{D}_{f^3} = \mathbb{R} \setminus \left\{ -1, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{3} \right\}$

$f^{(3)}(x) = \frac{\frac{x}{1+2x}}{1 + \frac{x}{1+2x}} = \frac{x}{1+3x}$

4) Mq $f^{(n)}(x) = \frac{x}{1+nx}$ et $\mathcal{D}_{f^n} = \mathbb{R} \setminus \left\{ -\frac{1}{n}, -\frac{1}{n-1}, \dots, -\frac{1}{2}, -1 \right\}$

I. n=1 par n = { 1, 2, 3 }.

II. S-p. $\exists n \in \mathbb{N}^* + 1$ $\mathcal{D}_{f^{n+1}} = \left\{ x \in \mathcal{D}_{f^n}, f^{(n)}(x) \neq -1 \right\}$

$\frac{x}{1+nx} = -1 \Leftrightarrow (n+1)x = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{n+1}$

$f^{(n+1)}(x) = f \circ f^{(n)}(x) = \frac{\frac{x}{1+nx}}{1 + \frac{x}{1+nx}} = \frac{x}{1+(n+1)x} \quad \square$

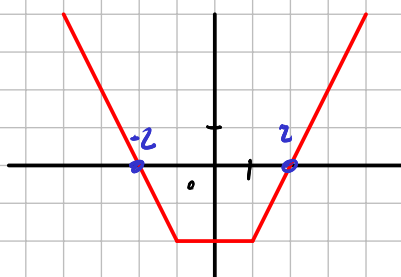
1. Montrer que f est paire.
2. Donner une expression de f ne faisant pas intervenir la valeur absolue.
3. Étudier la continuité de f et tracer le graphe de f .
4. Résoudre, dans $\mathbb{R}$, l'équation et l'inéquation suivantes :

(a) $|x+1| + |x-1| = 4$, (b) $|x+1| + |x-1| \leq 4$.

1) $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(-x) = \dots = f(x)$. f paire

2) $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} x+1 + x-1 - 4 & \text{si } x \geq 1 \\ x+1 + 1-x - 4 & \text{si } -1 < x < 1 \\ -x-1 - x+1 - 4 & \text{si } x < -1 \end{cases} = \begin{cases} 2x-4 & \text{si } x \geq 1 \\ -2 & \text{si } -1 < x < 1 \\ -2x-4 & \text{si } x < -1 \end{cases}$

3) $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}) \cap \mathcal{C}^1(\mathbb{R}) \Rightarrow f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$



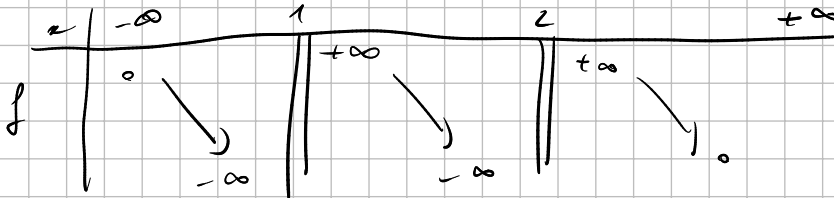
4) (a) $\Leftrightarrow f(x) = 0$.
 si $x \leq -1$, $f(x) = 0 \Leftrightarrow -2x-4 = 0 \Leftrightarrow x = -2$
 si $-1 < x < 1$, $f(x) = 0 \Leftrightarrow -2 = 0$
 si $x \geq 1$, $f(x) = 0 \Leftrightarrow 2x-4 = 0 \Leftrightarrow x = 2$
 $\mathcal{S} = \{-2, 2\}$

(b) $\Leftrightarrow f(x) \leq 0$.
 si $x \leq -1$, $f(x) \leq 0 \Leftrightarrow -2x-4 \leq 0 \Leftrightarrow x \geq -2$
 si $-1 < x < 1$, $f(x) \leq 0 \Leftrightarrow -2 \leq 0$
 si $x \geq 1$, $f(x) \leq 0 \Leftrightarrow 2x-4 \leq 0 \Leftrightarrow x \leq 2$
 $\mathcal{S} = [-2, 2]$

Exercice 3.14. Soit f la fonction définie par $f(x) = \frac{1}{(x-1)^3} + \frac{1}{(x-2)^5}$ et soit l'équation
 $(E) : f(x) = 0$.

1. Étudier brièvement les variations de f .
2. Montrer que l'équation (E) admet une unique solution dans $]1, 2[$.
3. Montrer que (E) n'admet pas de solution dans les intervalles $] -\infty, 1[$ et $]2, +\infty[$.

1) $D_f = \mathbb{R} \setminus \{1, 2\}$ Σ f est définie sur les int. de $\mathbb{R} \setminus \{1, 2\}$



2) $f \in \mathcal{C}^0(]1, 2[)$, f stricte sur $]1, 2[$
 $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = +\infty$ $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = -\infty$ } vérifier TVP $f(x) = 0$ unique sol dans $]1, 2[$

3) sur $] -\infty, 1[$, $f(x) < 0$
sur $]2, +\infty[$, $f(x) > 0$

1. Montrer qu'il existe un unique $x_n \in]0, 1[$ tel que $f_n(x_n) = 0$.
2. Montrer que $f_{n+1}(x_n) < 0$.
3. En déduire que la suite (x_n) est croissante et qu'elle converge vers une limite ℓ .
4. Justifier que $0 \leq \ell^n + \ell - 1$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, puis déterminer ℓ .

1) $\forall n \in \mathbb{N}^*, f_n \in \mathcal{C}^0([0, 1])$, f_n est $\nearrow$ sur $[0, 1]$, $f_n(0) = -1$, $f_n(1) = 2$
+ corollaire TVI. $\exists! x_n \in]0, 1[, f_n(x_n) = 0$

2) $f_{n+1}(x_n) = x_n^{n+1} + x_n - 1$ mais $x_n \in]0, 1[\Rightarrow x_n^{n+1} < x_n^1$
 $\Rightarrow f_{n+1}(x_n) < 0$

$\forall n \in \mathbb{N}^*$
3) $f_{n+1}(x_{n+1}) > f_{n+1}(x_n) \Rightarrow x_{n+1} > x_n$ (x_n) $\nearrow$ majorée par 1
 $\Rightarrow \text{CU}$ vers $\ell \leq 1$

4) $f_n(x_n) = 0$ et $\ell \geq x_n \Rightarrow f_n(\ell) \geq f_n(x_n) = 0$
 $\Rightarrow \ell^n + \ell - 1 \geq 0$

$\ell^n \geq 1 - \ell$, $\forall n$ si $\ell \in]0, 1[$, $\ell - \ell^n > 0$

$\Rightarrow 0 \geq 1 - \ell \Rightarrow \ell \geq 1$ Absurde $\Rightarrow \ell = 0$ ou $\ell = 1$.

si $\ell = 0$, $x_1 = \frac{1}{2}$ et $x_1 \leq \ell$: absurde $\Rightarrow \ell = 1$

Exercice 3.16. En justifiant les calculs, déterminer, lorsqu'elles existent, les limites suivantes :

1. $\lim_{x \rightarrow 0} \left(x + \frac{|x|}{x} \right)$
2. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sin \left(\frac{\pi \mathbb{E}(x)}{2x+1} \right)$
3. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(2x)}{3x}$
4. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin(x)}{\sqrt{x}}$.

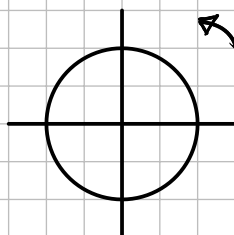
$$1) \lim_{x \rightarrow 0} x + \frac{|x|}{x} \quad \lim_{x \rightarrow 0} x = 0 \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x|}{x} = -1 \quad \lim_{x \rightarrow 0} x + 1 = 1 \quad \text{par la loi de l'addition}$$

$$2) \lim_{n \rightarrow +\infty} \sin \left(\frac{\pi \mathbb{E}(n)}{2n+1} \right) = l$$

$$\text{Si } \exists l, \quad l = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sin \left(\frac{n\pi}{2n+1} \right) = \sin \frac{\pi}{2} = 1.$$

$$\forall x > 0 \quad x \leq \mathbb{E}(x) < x+1$$

$$\Rightarrow \frac{\pi x}{2x+1} \leq \frac{\pi \mathbb{E}(x)}{2x+1} < \frac{\pi(x+1)}{2x+1}$$



$$\sin \left] \frac{\pi}{2}, +\infty \right[\quad \sin \text{ est } \nearrow$$

$$\forall n > \frac{1}{2} \quad \sin \frac{\pi n}{2n+1} \leq f(n) \leq \sin \frac{\pi(n+1)}{2n+1} \quad \text{Th encadrement}$$

$$\xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{\pi}{2} \leq l \leq \frac{\pi}{2}$$

$$3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{3x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2}{3} \frac{\sin 2x}{2x} = \frac{2}{3} \times 1 = \frac{2}{3}$$

TL composition

$$4) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin x}{\sqrt{x}} = 0, \quad \forall x > 0 \quad \frac{-1}{\sqrt{x}} < \frac{\sin x}{\sqrt{x}} < \frac{1}{\sqrt{x}} \quad \text{Th encadrement}$$

Exercice 3.17. Soit a et b deux réels avec b strictement positif. Soit la fonction $f :]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ telle que

$$f(x) = \begin{cases} a\sqrt{x} & \text{si } x < b \\ x^2 + 1 & \text{si } b \leq x. \end{cases}$$

Déterminer les réels a et b pour lesquels f est dérivable sur $]0, +\infty[$.

$$a \in \mathbb{R}, b > 0$$

$$f:]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto \begin{cases} a\sqrt{x} & \text{si } x < b \\ x^2 + 1 & \text{si } b \leq x \end{cases}$$

$$\begin{aligned} f \text{ dérivable} &\Rightarrow f \text{ continue} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = f(b) = b^2 + 1 \\ &\Rightarrow \lim_{x \rightarrow b^-} a\sqrt{x} = b^2 + 1 \\ &\Rightarrow a\sqrt{b} = b^2 + 1 \\ &\Rightarrow a = \frac{b^2 + 1}{\sqrt{b}} \end{aligned}$$

sur $]0, b[\cup]b, +\infty[$, $f \Sigma f \infty$ dér. donc dér.

$$T_b(x) = \frac{f(x) - f(b)}{x - b} = \begin{cases} \left(\frac{b^2 + 1}{\sqrt{b}} \sqrt{x} - \frac{b^2 + 1}{\sqrt{b}} \sqrt{b} \right) \frac{1}{x - b} & \text{si } x < b \\ (x^2 + 1 - (b^2 + 1)) \frac{1}{x - b} & \text{si } x > b \end{cases}$$

$$\text{si } x > b, \quad T_b(x) = \frac{x^2 + 1 - (b^2 + 1)}{x - b} \xrightarrow{x \rightarrow b} 2b$$

$$\text{si } x < b, \quad T_b(x) = \frac{\left(\frac{b^2 + 1}{\sqrt{b}} \sqrt{x} - \frac{b^2 + 1}{\sqrt{b}} \sqrt{b} \right)}{x - b} \xrightarrow{x \rightarrow b} \frac{b^2 + 1}{\sqrt{b}} \left(\frac{\sqrt{x} - \sqrt{b}}{x - b} \right) \xrightarrow{x \rightarrow b} \frac{b^2 + 1}{\sqrt{b}} \left(\frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{b}} \right) \xrightarrow{x \rightarrow b} \frac{b^2 + 1}{2b\sqrt{b}}$$

$$f \text{ dérivable en } b \text{ si } 2(b^2 + 1) = 2b \Leftrightarrow b^2 - b + 1 = 0$$

$$\Delta = 5 \quad b_1 = \frac{1 - \sqrt{5}}{2} < 0, \quad b_2 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} > 0$$

$$f \text{ dérivable sur }]0, +\infty[\text{ si } a = \dots \text{ et } b = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}.$$

Exercice 3.18. Étudier la fonction f dans les cas suivants :

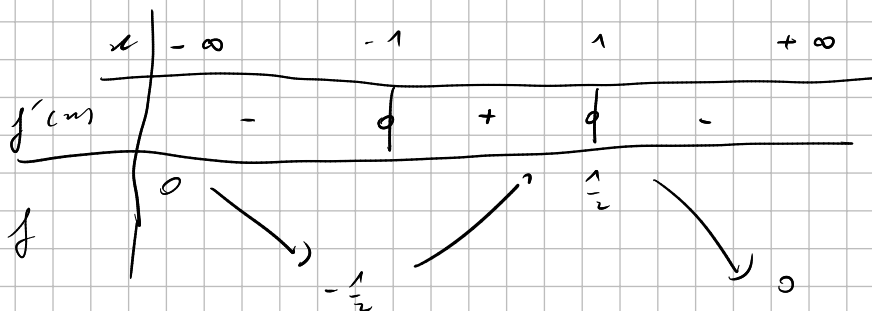
1. $f(x) = \frac{x}{1+x^2}$

2. $f(x) = \sqrt{\frac{x+1}{x-1}}$

On précisera le domaine de définition, les limites aux bornes et branches infinies, sens de variation, convexité et points d'inflexion et on tracera le graphe.

1) f définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R}$. f impaire.

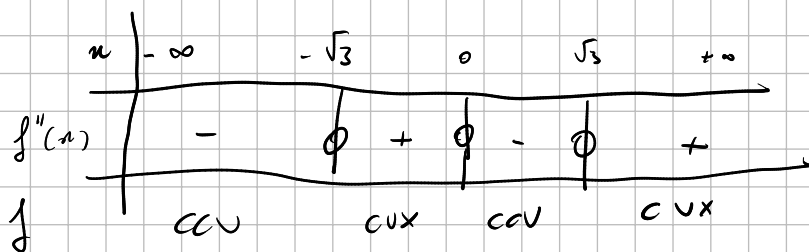
$$f'(x) = \frac{1+x^2 - 2x^2}{(1+x^2)^2} = \frac{(1-x)(1+x)}{(1+x^2)^2} = \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}$$



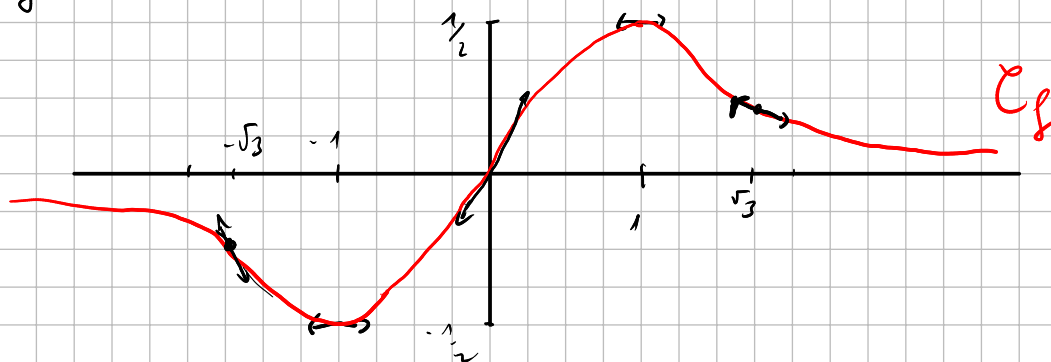
$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 0.$$

$$f''(x) = \frac{-2x(1+x^2)^2 - (1-x^2) \cdot 2 \cdot 2x \cdot (1+x^2)}{(1+x^2)^4} = \frac{-2x(1+x^2) - 4x(1-x^2)}{(1+x^2)^3}$$

$$f''(x) = \frac{-2x(1+x^2+2-2x^2)}{(1+x^2)^3} = \frac{-2x}{(1+x^2)^2} (3-x^2) = \frac{-2x(\sqrt{3}-x)(\sqrt{3}+x)}{(1+x^2)^3}$$



$y=0$ A. H.
en $-\infty$ et $+\infty$



$$2) f(x) = \sqrt{\frac{x+1}{x-1}} = \sqrt{1 + \frac{2}{x-1}}$$

$$D_f:]-\infty; -1] \cup]1; +\infty[$$

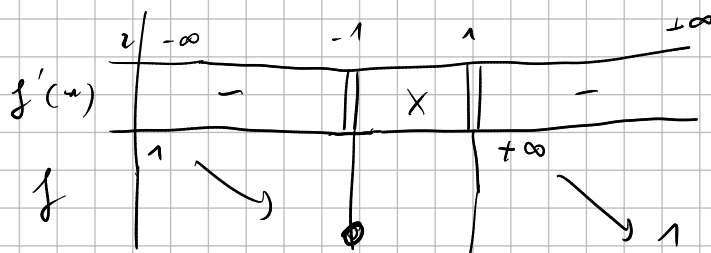
$$f \text{ derivable sur }]-\infty; -1[\cup]1; +\infty[$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$$

$$f'(x) = \frac{1}{2} \cdot \frac{-2}{(x-1)^2} \cdot \left(\frac{x+1}{x-1}\right)^{-\frac{1}{2}} = -\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^{\frac{1}{2}} (x-1)^{-2} = -\frac{1}{(x+1)^{\frac{1}{2}} (x-1)^{\frac{3}{2}}}$$

$$f'(x) < 0 \text{ sur } D_f$$

$$f'(x) = - (x+1)^{-\frac{1}{2}} (x-1)^{-\frac{3}{2}}$$

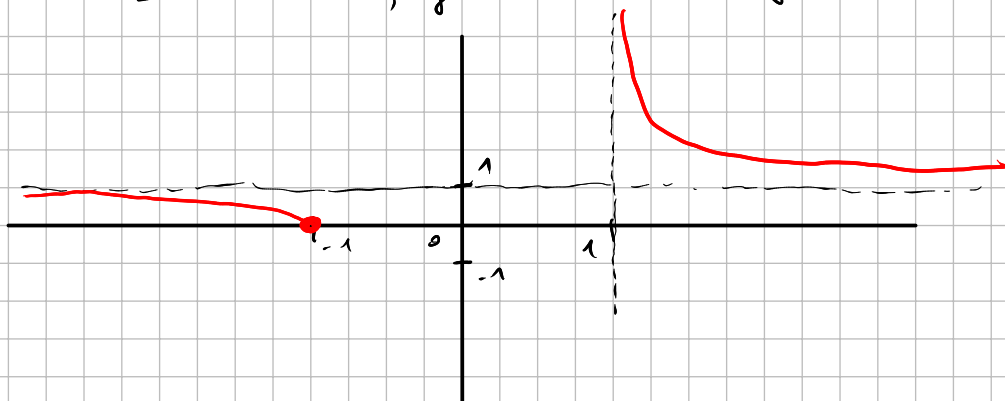


$$f''(x) = - \left[-\frac{1}{2} (x+1)^{-\frac{3}{2}} (x-1)^{-\frac{1}{2}} - \frac{3}{2} (x+1)^{-\frac{1}{2}} (x-1)^{-\frac{5}{2}} \right]$$

$$f''(x) = \frac{1}{2} (x+1)^{-\frac{3}{2}} (x-1)^{-\frac{5}{2}} \left[(x-1) + (x+1) \right] = x (x+1)^{-\frac{3}{2}} (x-1)^{-\frac{5}{2}}$$

$$\text{sur }]-\infty; -1[, f''(x) < 0 \Rightarrow f \text{ CCV}$$

$$\text{sur }]1; +\infty[, f''(x) > 0 \Rightarrow f \text{ CVX}$$



Exercice 3.19. Soit la fonction f définie par $f(x) = \sqrt{x^2 - 4x + 8}$.

1. Déterminer le domaine de définition de f .
2. Étudier les variations de f .
3. Montrer que f réalise une bijection de $I = [2, +\infty[$ sur son image (à préciser).
4. Justifier que la fonction réciproque de f est continue et déterminer celle-ci.

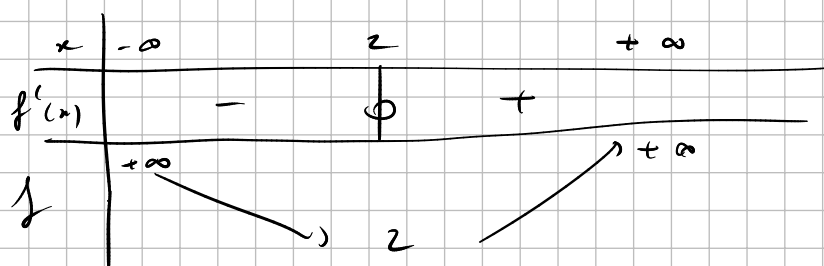
$$1) \mathcal{D}_f = \{x \in \mathbb{R}, x^2 - 4x + 8 \geq 0\} \quad \Delta = 16 - 32 = -16 < 0$$

$$\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$$

2) f composition de $f \circ \text{id}$ dérivables sur $\mathbb{R}$

$$\forall x \in \mathbb{R}, x^2 - 4x + 8 > 0, x^2 - 4x + 8 \in \mathcal{D}_f$$

$$f'(x) = \frac{2x - 4}{2\sqrt{\dots}} = \frac{x - 2}{\sqrt{x^2 - 4x + 8}}$$



3) ∇b bij $\Rightarrow f$ bij de $[2; +\infty[$ dans $[2; +\infty[$

4) $f \in \mathcal{C}^1 \Rightarrow f^{-1} \in \mathcal{C}^1$

$$\forall x \in [2; +\infty[, \forall y \in [2; +\infty[, f(x) = y \Leftrightarrow f^{-1}(y) = x$$

$$\sqrt{x^2 - 4x + 8} = y \Leftrightarrow x^2 - 4x + 8 = y^2$$

$$\Leftrightarrow (x-2)^2 + 4 - y^2 = 0 \Leftrightarrow (x-2)^2 = y^2 - 4$$

$$\Leftrightarrow x - 2 = \sqrt{y^2 - 4} \Leftrightarrow x = 2 + \sqrt{y^2 - 4} = f^{-1}(y)$$

Exercice 3.20. Soit $f(x) = x^4 - x^3 + 1$.

1. Déterminer les points critiques de f et préciser la nature de ceux-ci.
2. Étudier la convexité de f .
3. En déduire que f admet deux points d'inflexion et déterminer la tangente au graphe de f en ces points.

1) f dérivable sur $\mathbb{R}$

$$f'(x) = 4x^3 - 3x^2 = x^2(4x - 3)$$

x	$-\infty$	0	$\frac{3}{4}$	$+\infty$
f'		-	0	+
f				

pt d'ég. → min global

$$2) f''(x) = 12x^2 - 6x = 6x(2x - 1)$$

x	$-\infty$	0	$\frac{1}{2}$	$+\infty$
$f''(x)$	+	0	-	+
f	cvx	cv	cvx	

pt d'ég. → pt d'inf.