

Exercice 2.1. Étudier la convergence des suites suivantes, données par leur terme général :

1. $u_n = \frac{n^2 + 1}{2n^3 + 1}$
2. $u_n = \sqrt{n^2 + n} - n$
3. $u_n = 2^{1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^n}}$
4. $u_n = \frac{2n^3 - 1}{n^2 + 1}$
5. $u_n = \frac{n^2 + 1}{n - 1} - n$
6. $u_n = \frac{n + 1}{n} + \frac{(-2)^n}{3^n}$
7. $u_n = 4^n + (-3)^n$
8. $u_n = \frac{2^{n+1} + 3^{n+1}}{2^n + 3^n}$
9. $u_n = \frac{\pi^n}{2^{2n}} + \cos\left(\frac{3^n}{2^{2n}}\right)$

1) $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \frac{1}{n} \frac{1 + \frac{1}{n^2}}{2 + \frac{1}{n^3}}$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$

2) $\forall n > 1$, $u_n = n \left(\sqrt{1 + \frac{1}{n}} - 1 \right)$ FI $\infty \cdot 0$
 $u_n = \frac{n^2 + n - n^2}{\sqrt{n^2 + n} + n} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{n}} + 1} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \frac{1}{2}$

3) $\forall n > 0$, $u_n = \exp\left(\underbrace{\left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2^n}\right)}_{S_n} \ln n\right)$
 $S_n = \frac{1 - \frac{1}{2^{n+1}}}{1 - \frac{1}{2}} = 2 \left(1 - \frac{1}{2^{n+1}}\right) \Rightarrow u_n = \exp\left(2 \left(1 - \frac{1}{2^{n+1}}\right) \ln n\right)$
 $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$

4) $u_n = \frac{2n^3 - 1}{n^2 + 1} = n \frac{2 - \frac{1}{n^3}}{1 + \frac{1}{n^2}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$

5) $u_n = \frac{n^2 + 1}{n - 1} - n = \frac{n^2 + 1 - n^2 - n}{n - 1} = -1 \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} -1$

6) $u_n = \frac{n+1}{n} - \frac{(-2)^n}{3^n} = 1 + \frac{1}{n} - \left(\frac{-2}{3}\right)^n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$

7) $u_n = 4^n + (-3)^n = 4^n \left(1 + \left(\frac{-3}{4}\right)^n\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$

8) $u_n = \frac{2^{n+1} + 3^{n+1}}{2^n + 3^n} = \frac{3^{n+1} \left(\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} + 1\right)}{3^n \left(\left(\frac{2}{3}\right)^n + 1\right)} = 3 \frac{1 + \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}}{1 + \left(\frac{2}{3}\right)^n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 3$

9) $u_n = \frac{\pi^n}{2^{2n}} + \cos\left(\frac{3}{2^{2n}}\right) = \left(\frac{\pi}{4}\right)^n \left[1 + \frac{\cos(\dots)}{\left(\frac{\pi}{4}\right)^n}\right] \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$

$$\begin{array}{lll} 1. u_n = \frac{n - (-1)^n}{n + (-1)^n} & 2. u_n = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{n}\right)^n & 3. u_n = (-2)^n + 2^n \\ 4. u_n = \frac{n + (-1)^n n}{2n + 1} & 5. u_n = \frac{n2^{2n} - 3^n}{n2^{2n} + 3^n} & 6. u_n = \sin\left(\frac{2n\pi}{3}\right). \end{array}$$

$$1) u_n = \frac{1 - \frac{(-1)^n}{n}}{1 + \frac{(-1)^n}{n}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$$

$$2) u_n = \exp\left(n \ln\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{n}\right)\right) = \exp\left(n \ln\left(\frac{1 + \frac{2}{n}}{2}\right)\right)$$

$$u_n = \exp\left(n \ln\left(\frac{1}{2} \left(1 + \frac{2}{n}\right)\right)\right).$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2} \left(1 + \frac{2}{n}\right) = \frac{1}{2} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} \ln\left(\frac{1}{2} \left(1 + \frac{2}{n}\right)\right) = -\ln 2$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \exp(-n \ln 2) = 0$$

$$3) u_n = (-2)^n + 2^n = 2^n [(-1)^n + 1]$$

$$u_{2n} = 0, \quad u_{2n+1} = 2^{2n+1} \rightarrow +\infty$$

(u_n) DV

$$4) u_n = \frac{n - (-1)^n}{n + (-1)^n} = 1 + \frac{1 - \frac{(-1)^n}{n}}{1 + \frac{(-1)^n}{n}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$$

$$5) u_n = \frac{n2^{2n} - 3^n}{n2^{2n} + 3^n} = \frac{n - \left(\frac{3}{4}\right)^n}{n + \left(\frac{3}{4}\right)^n} = \frac{1 - \frac{\left(\frac{3}{4}\right)^n}{n}}{1 + \frac{\left(\frac{3}{4}\right)^n}{n}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$$

$$6) u_n = \sin\left(\frac{2n\pi}{3}\right)$$

periodique?

$$u_0 = \sin 0 = 0, \quad u_1 = \sin \frac{2\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

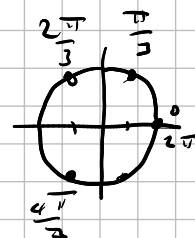
$$u_2 = \sin \frac{4\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}, \quad u_3 = \sin \frac{6\pi}{3} = 0$$

$$u_4 = \sin \left(\frac{8\pi}{3}\right) = \sin \left(2\pi + \frac{2\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$\forall n \in \mathbb{N},$

$$u_{n+3} = \sin\left(\frac{2(n+3)\pi}{3}\right) = \sin\left(\frac{2n\pi}{3} + 2\pi\right) = \sin\left(\frac{2n\pi}{3}\right) = u_n$$

$$u_{3n} = 0, \quad u_{3n+1} = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad u_{3n+2} = -\frac{\sqrt{3}}{2}. \quad (u_n) \text{ DV}$$



1. $u_n = \sqrt[n]{3 - \sin(n^2)}$

2. $u_n = \frac{\sin(1+n^2)}{\sqrt{n}}$

3. $u_n = \sin(n) + n$

4. $u_n = \cos(n) \sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$

5. $u_n = \left(\frac{\sin(n)}{2}\right)^n$

6. $u_n = \sqrt[n]{2 + (-1)^n}$

1) $u_n \geq \sqrt[n]{3-1} = \sqrt[n]{2} = 2^{\frac{1}{n}} = \exp\left(\frac{1}{n} \ln(2)\right) \rightarrow 1$ $\left\{ \begin{array}{l} \text{encadrement} \\ \lim u_n = 1 \end{array} \right.$
 $u_n \leq \sqrt[n]{4} = 4^{\frac{1}{n}} = \exp\left(\frac{1}{n} \ln(4)\right) \rightarrow 1$

2) $-\frac{1}{\sqrt{n}} \leq u_n \leq \frac{1}{\sqrt{n}} \quad \lim u_n = 0$

3) $u_n \geq n-1 \quad \lim u_n = +\infty$

4) $-\sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \leq u_n \leq \sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right), \quad \lim u_n = 0$

5) $-\left(\frac{1}{2}\right)^n \leq u_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n \quad \lim u_n = 0$

6) $u_n = \sqrt[n]{2 + (-1)^n} = (2 + (-1)^n)^{\frac{1}{n}} = \exp\left(\frac{1}{n} \ln(2 + (-1)^n)\right)$
 $0 \leq u_n \leq \exp\left(\frac{1}{n} \ln(3)\right) \rightarrow 0 \quad \lim u_n = 0$

$$u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k!} = 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!}$$

1. Étudier le sens de variation de la suite (u_n) .
2. Démontrer par récurrence que, pour tout entier $k \geq 1$, $k! \geq 2^{k-1}$.
3. En déduire que, pour tout $n \geq 1$, $u_n \leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{2^{k-1}}$, puis que $u_n \leq 2$.
4. Justifier que la suite (u_n) converge vers un nombre réel ℓ .

1) $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{(n+1)!} > 0 \quad (u_n) \nearrow$

2) I oui II sup $\exists k \in \mathbb{N}^*$, $k! \geq 2^{k-1}$ alors $(k+1)! \geq (k+1)k! \geq (k+1)2^{k-1} \geq 2 \cdot 2^{k-1} = 2^k \quad \square$

3) $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k!} \leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{2^{k-1}}$ i.e. $\hookrightarrow$

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{2^{k-1}} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2^k} = \frac{1 - (\frac{1}{2})^n}{1 - \frac{1}{2}} = 2 \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right) \rightarrow 2$$

4) $(u_n) \nearrow$ majorée CV

Exercice 2.5. Soit la suite définie par $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = \frac{u_n + 1}{u_n + 2}$ pour $n \geq 0$.

1. Montrer que, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq u_n$.
2. Montrer que l'équation $x = \frac{x+1}{x+2}$ admet une seule solution positive ℓ .
3. Montrer que, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $|u_{n+1} - \ell| \leq \frac{1}{4} |u_n - \ell|$.
4. Montrer que, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $|u_n - \ell| \leq \frac{1}{4^n} |u_0 - \ell|$.
5. En déduire que la suite (u_n) est convergente. Quelle est sa limite?

1) Résumer I ou II en D

2) $\forall x \neq -2 \quad \frac{x+1}{x+2} = \frac{x+1}{x+2} \Leftrightarrow x^2 + 2x - x - 1 = 0 \Leftrightarrow x^2 + x - 1 = 0$
 $\Delta = 5 \quad x_1 = \frac{-1-\sqrt{5}}{2} < 0 \quad x_2 = \frac{-1+\sqrt{5}}{2} > 0 \quad \therefore \ell$

3) Posons $f(x) = \frac{x+1}{x+2}$, $|u_{n+1} - \ell| = |f(u_n) - f(\ell)|$
 $f(\ell) = \ell$
 $= \left| \frac{u_n+1}{u_n+2} - \frac{\ell+1}{\ell+2} \right| = \left| \frac{(\ell+2)(u_n+1) - (\ell+1)(u_n+2)}{(u_n+2)(\ell+2)} \right|$
 $= \left| \frac{\cancel{\ell}u_n + 2u_n + \cancel{\ell} + 2 - \cancel{\ell}u_n - u_n - 2\cancel{\ell} - 2}{(u_n+2)(\ell+2)} \right| = \left| \frac{u_n - \ell}{(u_n+2)(\ell+2)} \right|$

or $u_n > 0$ et $\ell > 0$ donc $u_n+2 \geq 2$ et $\ell+2 \geq 2$

donc $|u_{n+1} - \ell| \leq \frac{1}{4} |u_n - \ell|$

4) Résumer

5) It en résulte $-\frac{1}{4^n} |u_0 - \ell| \leq u_n - \ell \leq \frac{1}{4^n} |u_0 - \ell|$
 $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell$

$$u_n = \left| \frac{1}{n} - \frac{2}{n} + \frac{3}{n} - \frac{4}{n} + \dots + \frac{(-1)^{n-1}n}{n} \right|.$$

On pourra considérer les sous-suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) .

$$u_{2n} = \left| \frac{1}{2n} - \frac{2}{2n} + \frac{3}{2n} - \frac{4}{2n} + \dots + \frac{-2n}{2n} \right| = \left| \frac{1-2+3-4+\dots-2n}{2n} \right|$$

$$u_{2n} = \left| \frac{\overbrace{-1 + (-1) + \dots + (-1)}^n}{2n} \right| = \left| -\frac{1}{2} \right| = \frac{1}{2}.$$

$$u_{2n+1} = \left| \frac{1}{2n+1} - \frac{2}{2n+1} + \frac{3}{2n+1} - \frac{4}{2n+1} + \dots + \frac{2n+1}{2n+1} \right| = \left| \frac{1-2+3-4+\dots+(-2n)+(2n+1)}{2n+1} \right|$$

isolé
=1
=1
=1
n paquets

$$= \left| \underbrace{\frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+1} + \dots + \frac{1}{2n+1}}_n \right| = \left| \frac{n}{2n+1} \right| \rightarrow \frac{1}{2}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_{2n} = \lim_{n \rightarrow \infty} u_{2n+1} = \frac{1}{2} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \frac{1}{2}$$

Exercice 2.7. Montrer que les deux suites $(u_n)_{n \geq 1}$ et $(v_n)_{n \geq 1}$ sont convergentes et qu'elles convergent vers la même limite dans les cas suivants :

7

1. $u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{n^2}$ et $v_n = u_n + \frac{1}{n}$.

2. $u_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} = 1 + \frac{1}{1!} + \dots + \frac{1}{n!}$ et $v_n = u_n + \frac{1}{n \cdot n!}$.

1) $v_n - u_n = \frac{1}{n} \rightarrow 0$, $v_n \geq u_n$, $u_n \nearrow$, $v_n \searrow$. Adjacentes

2) idem $v_{n+1} - v_n = \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+1)(n+1)!} - \frac{1}{n \cdot n!}$

$= \frac{n(n+1) - n - (n+1)^2}{n(n+1)(n+1)!} = \frac{-1}{n(n+1)(n+1)!} < 0$. Adjacentes

Exercice 2.8. Pour tout $n \geq 1$, on pose $u_n = \sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^k}{k}$ et $v_n = \sum_{k=1}^{2n+1} \frac{(-1)^k}{k}$.

1. Montrer que les suites $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ sont adjacentes.

2. Que dire de la suite (w_n) de terme général $w_n = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^k}{k}$?

$$\begin{array}{lcl}
 1. & v_n - u_n = & \frac{1}{2n+1} \rightarrow 0 \\
 & u_{n+1} - u_n = & \frac{-1}{2n+1} + \frac{1}{2n} > 0 \\
 & v_{n+1} - v_n = & \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+2} < 0
 \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{l} \\ \\ \end{array}} \right\} \text{adjacentes, \hat{a} l}$$

$$2. \quad w_{2n} = u_n \text{ et } w_{2n+1} = v_n \text{ ont \hat{a} l - donc } w_n \rightarrow l$$

EXERCICES SUPPLÉMENTAIRES

Exercice 2.9. En justifiant la réponse, dire si les énoncés suivants sont vrais ou faux :

1. Toute suite croissante à partir d'un certain rang est minorée.
2. Une suite décroissante minorée par 0 converge vers 0.
3. Si une suite est non majorée, alors elle tend vers $+\infty$.
4. Soit une suite qui tend vers $+\infty$. Alors elle est croissante à partir d'un certain rang.
5. Soit (u_n) et (v_n) deux suites telles que $u_n < v_n$. Si ces deux suites sont convergentes, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n < \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$.
6. Si les deux sous-suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont convergentes, alors la suite (u_n) est aussi convergente.

1) Vrai. $\exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ tq } n \geq n_0 \Rightarrow u_{n+1} - u_n \geq 0$

Donc $(u_n)_{n \geq n_0}$ minorée par u_{n_0}
 $\left\{ u_n, n=0, \dots, n_0-1 \right\}$ minorée car finie } (u_n) minorée

2) Faux $u_n = 1 + \frac{1}{n} \searrow$, minorée par 0 $\lim u_n = 1$

3) Faux $u_n = \begin{cases} 2n & \text{si } n \text{ pair} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ u_n est non majorée
 mais $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_{2n+1} = 0$

4) Faux $u_n = \begin{cases} n & \text{si } n \text{ pair} \\ 2n+1 & \text{sinon} \end{cases}$ $u_{2n+2} - u_{2n+1} = 2n+2 - 2(2n+1) < 0$
 mais $\lim u_n = +\infty$ (suite extraite)

5) Faux $u_n = 0$ $v_n = \frac{1}{n}$ $\lim u_n = \lim v_n = 0$

6) Faux $u_n = (-1)^n$ $u_{2n} = 1$ CV $u_{2n+1} = -1$ CV
 u_n DV

Exercice 2.10. Soit $a > 0$ et $(u_n)_{n \geq 0}$ la suite définie par $u_0 > 0$ et $u_{n+1} = \frac{u_n^2 + a^2}{2u_n}$.

1. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n \geq a$, et puis que $(u_n)_{n \geq 1}$ est décroissante.
2. Justifier que la suite (u_n) est convergente.
3. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $|u_{n+1} - a| \leq \frac{|u_1 - a|}{2^n}$. En déduire la limite de la suite (u_n) .

1) Rec. I. $u_1 = \frac{u_0^2 + a^2}{2u_0} = \frac{u_0}{2} + \frac{a^2}{2u_0}$

$$g(x) = \frac{x}{2} + \frac{a^2}{2x} = \frac{x^2 + a^2}{2x}$$

$$g'(x) = \frac{1}{2} - \frac{2a^2}{(2x)^2} = \frac{2x^2 - 2a^2}{4x^2} = \frac{2(x-a)(x+a)}{4x^2}$$

 $g(a) = a$

x	0	a	$+\infty$
$g'(x)$		-	+
g			

$$g(a) = \frac{2a^2}{2a} = a$$

$\forall x > 0, g(x) \geq g(a)$
 $\Rightarrow u_1 \geq a$

II. Supp $\exists n \in \mathbb{N}^*$ tq $u_n \geq a$ alors

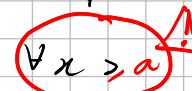
$$u_{n+1} = g(u_n) \geq a$$

Mq $(u_n) \searrow$

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= g(u_n) - u_n \\ &= \frac{u_n^2 + a^2}{2u_n} - u_n = \frac{a^2 - u_n^2}{2u_n} \\ &= \frac{(a - u_n)(a + u_n)}{2u_n} \leq 0. \end{aligned}$$

$$\Rightarrow (u_n) \searrow$$

c) $(u_n) \searrow$ minorée par $a \Rightarrow u_n \text{ CV } l \geq a$.

3) $g(a) = a$.  $\forall x > a$ $g(x) - a = \frac{x^2 + a^2}{2x} - a$
 $= \frac{x^2 + a^2 - 2xa}{2x} = \frac{(x-a)^2}{2x} = (x-a) \frac{x-a}{2x}$

$$\forall x \geq a, |g(x) - a| = \frac{|x-a|}{2} \left| \frac{x-a}{x} \right| \leq \frac{|x-a|}{2} \quad \text{car } \frac{x}{x} \geq 1 > 0$$

Par récurrence. I. $\forall n \in \mathbb{N}^*$ $|u_n - a| \leq \frac{|u_1 - a|}{2^n} = |u_1 - a|$

II Supp $\exists n \in \mathbb{N}^*$ tq $|u_{n+1} - a| \leq \frac{|u_1 - a|}{2^n}$

Alors $|u_{n+2} - a| = |g(u_{n+1}) - a| \leq \frac{|u_{n+1} - a|}{2} \leq \frac{|u_1 - a|}{2^{n+1}}$
 $g(a) = a$

Donc $l = u_n = a$ Therefore

car $u_n \geq a, \forall n \in \mathbb{N}^*$ 

$$u_0 = 1, \quad v_0 = 2, \quad v_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2} \quad \text{et} \quad u_{n+1} = \frac{2}{v_{n+1}}.$$

1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 < u_n \leq u_{n+1} \leq v_{n+1} \leq v_n$.
2. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq v_{n+1} - u_{n+1} \leq \frac{v_n - u_n}{2}$.
3. Montrer que les suites (u_n) et (v_n) convergent vers une même limite. On calculera la valeur de cette limite.

1. Par récurrence.

$$u_0 = 1, \quad v_0 = 2 \\ u_1 = \frac{2}{3}, \quad v_1 = \frac{3}{2} \quad \text{I. v. v.}$$

II. Supp. $\exists n \text{ tq}$ $0 < u_n \leq u_{n+1} \leq v_{n+1} \leq v_n$

$$\bullet \quad v_{n+2} = \frac{u_{n+1} + v_{n+1}}{2} \leq \frac{v_{n+1} + v_{n+1}}{2} = v_{n+1} \quad \text{donc } \textcircled{3} \text{ est héréditaire}$$

$$\bullet \quad u_{n+2} = \frac{2}{v_{n+2}} = \frac{2}{\frac{u_{n+1} + v_{n+1}}{2}} = \frac{4}{u_{n+1} + v_{n+1}}$$

et $v_{n+2} > 0$

$$\bullet \quad u_{n+2} = \frac{2}{v_{n+2}} \quad \text{et} \quad u_{n+1} > \frac{2}{v_{n+1}} \quad \text{et} \quad 0 < v_{n+2} \leq v_{n+1}$$

donc $u_{n+2} \geq v_{n+2}$ donc $\textcircled{2}$ héréditaire et $u_{n+1} > u_n > 0$

donc $\textcircled{1}$ aussi

$$\bullet \quad v_{n+2} - u_{n+2} = \frac{4}{u_{n+1} + v_{n+1}} - \frac{u_{n+1} + v_{n+1}}{2} = \frac{4 - (u_{n+1} + v_{n+1})^2}{2(u_{n+1} + v_{n+1})}$$

Inégalité arithmético géométrique: $\forall (a, b) \in \mathbb{R}_+, \quad \frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$

$$\text{donc} \quad v_{n+2} = \frac{u_{n+1} + v_{n+1}}{2} \geq \sqrt{u_{n+1} v_{n+1}} = \sqrt{\frac{2}{v_{n+1}} v_{n+1}} = \sqrt{2}.$$

$$\text{et} \quad u_{n+2} = \frac{2}{v_{n+2}} \leq \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$$

donc $u_{n+2} \leq v_{n+2}$ et $\textcircled{3}$ héréditaire.

$$2) \text{ Mq } \forall n \in \mathbb{N} \quad 0 \leq v_{n+1} - u_{n+1} \leq \frac{v_n - u_n}{2}$$

$\textcircled{1} \qquad \qquad \qquad \textcircled{2}$

Q1 $\Rightarrow$ 1, $\forall n \in \mathbb{N}$.

$$v_{n+1} - u_{n+1} = v_{n+1} - \frac{2}{v_{n+1}} = \frac{u_n + v_n}{2} - \frac{2}{v_{n+1}} = \frac{u_n + v_n}{2} - \frac{4}{u_n + v_n}$$

$$D_n = \frac{u_n + v_n}{2} - \frac{4}{u_n + v_n} - \frac{u_n - v_n}{2} = u_n - \frac{4}{u_n + v_n} = \frac{u_n^2 - u_n v_n - 4}{u_n + v_n}$$

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n v_n = 2 \quad \text{donc} \quad D_n = \frac{u_n^2 - 6}{u_n + v_n} \quad \text{Mais} \quad u_n \leq \sqrt{2}$$

$$\text{donc} \quad u_n^2 - 6 \leq 0 \quad \text{et} \quad D_n \leq 0 \quad \square$$

3) $M_g(u_n) \text{ et } (v_n)$ CV vers l ?

$M_g(u_n) \text{ et } (v_n)$ sont adjacents

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad |v_{n+1} - u_{n+1}| \leq \frac{1}{2} |v_n - u_n| \Rightarrow |v_n - u_n| \leq \frac{1}{2^n} |v_0 - u_0|$$

$$\Rightarrow l - v_n - u_n = 0$$

or $(u_n) \nearrow, (v_n) \searrow$ donc adjacents et CV vers l et l

de plus $l - v_{n+1} = l - v_n = l$

$$l - u_n = l$$

$$l - u_{n+1} = l \Rightarrow l - \frac{2}{u_n + v_n} = l \Rightarrow \frac{2}{2l} = l$$

$$\Rightarrow l^2 = 4 \quad \text{et } l \geq 0 \Rightarrow l = 2$$