

TD 1 Nombres réels 1 semaine

Exercice 1.1. Soit a, b et c trois nombres réels.

1. Démontrer que $ab \leq \frac{a^2 + b^2}{2}$.
2. Démontrer que $ab + ac + bc \leq a^2 + b^2 + c^2$.
3. Démontrer que $3ab + 3ac + 3bc \leq (a + b + c)^2$.

1) $\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2, (a - b)^2 \geq 0 \Leftrightarrow a^2 + b^2 - 2ab \geq 0 \Leftrightarrow ab \leq \frac{a^2 + b^2}{2}$

2) $\forall (a, b, c) \in \mathbb{R}^3, ab \leq \frac{a^2 + b^2}{2}, ac \leq \frac{a^2 + c^2}{2}, bc \leq \frac{b^2 + c^2}{2}$

Donc $ab + ac + bc \leq \frac{a^2 + b^2 + a^2 + c^2 + b^2 + c^2}{2} = a^2 + b^2 + c^2$

3) $\forall (a, b, c) \in \mathbb{R}^3,$
 $(a + b + c)^2 = (a + b + c)(a + b + c) = a^2 + ab + ac + ab + b^2 + bc + ac + bc + c^2$
 $= a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$

2) $\Rightarrow ab + ac + bc \leq a^2 + b^2 + c^2$
 $3ab + 3ac + 3bc \leq a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc = (a + b + c)^2$

Exercice 1.2.

1. Soit $x \in [1, 2]$. Encadrer rapidement le réel $\frac{2x + 1}{3x^2 + 4}$.
2. Montrer que, pour tout $x > 0, x + \frac{1}{x} \geq 2$.

1) $1 \leq x \leq 2 \Rightarrow 3 \leq 2x + 1 \leq 5$ et $1 \leq x \leq 2 \Rightarrow 7 \leq 3x^2 + 4 \leq 16$

$x \mapsto 2x + 1 \nearrow \text{sur } \mathbb{R}$ $x \mapsto 3x^2 + 4 \nearrow \text{sur } [0; +\infty[$

Donc $1 \leq x \leq 2 \Rightarrow \frac{1}{16} \leq \frac{1}{3x^2 + 4} \leq \frac{1}{7}$

Car $x \mapsto \frac{1}{x} \searrow \text{sur }]0; +\infty[$.

Les bornes de gauche sont > 0 donc $1 \leq x \leq 2 \Rightarrow \frac{3}{16} \leq \frac{2x + 1}{3x^2 + 4} \leq \frac{5}{7}$

2) $\forall x > 0, x + \frac{1}{x} - 2 = \frac{x^2 - 2x + 1}{x} = \frac{(x - 1)^2}{x} \geq 0$

Donc $x + \frac{1}{x} \geq 2$.

1. $\frac{x-1}{x+1} + \frac{1}{x} = m$
2. $\frac{x-2}{x+2} + \frac{1}{x-1} \geq 0$
3. $\sqrt{x-x^2} = x-1$
4. $|2x-5| = x+1$
5. $|x(x-2)| = |x-2|$
6. $|x+2| \leq 2|x-1|$.

1) $\frac{x-1}{x+1} + \frac{1}{x} = m. \quad \mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{-1; 0\}$

$\forall x \in \mathcal{D}, 1) \Leftrightarrow x(x-1) + x+1 = m x(x+1)$

$\Leftrightarrow x^2 + 1 - m x^2 - m x = 0 \Leftrightarrow (1-m)x^2 - m x + 1 = 0$

$\Delta_1 = m^2 - 4(1-m) = m^2 + 4m - 4$

$\Delta_2 = 16 + 4 = 20 > 0 \quad m_1 = \frac{-4 - \sqrt{20}}{2} = -2 - \sqrt{5}$
 $m_2 = -2 + \sqrt{5}$

. si $m < m_1$ ou $m > m_2$: 2 solutions $\hat{a}$ 1 dans $\mathbb{R}$

$x = \frac{1}{2} \left(m \pm \sqrt{m^2 + 4m - 4} \right)$

. si $m = m_1$ ou $m = m_2$, 1 racine double de l'expression

. si $m \in]m_1; m_2[$, aucune solution dans $\mathbb{R}$.

2) $\frac{x-2}{x+2} + \frac{1}{x-1} \geq 0 \quad \mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{-2; 1\}$

$\forall x \in \mathcal{D}, 2) \Leftrightarrow \frac{(x-2)(x-1) + x+2}{(x+2)(x-1)} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{x^2 - 3x + 2 + x + 2}{(x+2)(x-1)} \geq 0$

$\Leftrightarrow \frac{x^2 - 2x + 4}{(x+2)(x-1)} \geq 0 \quad x^2 - 2x + 4 : \Delta = 4 - 16 = -12 < 0$

$\frac{x}{(x+2)(x-1)} \quad \begin{array}{c|ccc} x & -\infty & -2 & 1 & +\infty \\ \hline & + & \phi & - & \phi & + \end{array} \quad \mathcal{I} =]-\infty; -2[\cup]1; +\infty[$

3) $\sqrt{x-x^2} = x-1. \quad \frac{x}{x-x^2} \quad \begin{array}{c|ccc} x & -\infty & 0 & 1 & +\infty \\ \hline & - & \phi & + & \phi & - \end{array} \Rightarrow \mathcal{D} = [0; 1]$

$\forall x \in [0; 1[, x-1 < 0$ et $\sqrt{x-x^2} \geq 0$ 3) n'y a pas de solution
 $\mathcal{I} = \{1\}$

4) $|2x-5| = x+1 \quad \mathcal{D} = \mathbb{R}$

$\forall x \in]-\infty; \frac{5}{2}[, 2x-5 < 0$ et 4) $\Leftrightarrow 5-2x = x+1 \Leftrightarrow 4 = 3x \Leftrightarrow x = \frac{4}{3}$

$\forall x \in [\frac{5}{2}; +\infty[, 2x-5 \geq 0$ et 4) $\Leftrightarrow 2x-5 = x+1 \Leftrightarrow x = 6$

$\mathcal{I} = \left\{ \frac{4}{3}; 6 \right\}$

$$5) |x(x-2)| = |x-2| \quad D = \mathbb{R}$$

$$\bullet \forall x \in]-\infty; 0[, \quad x(x-2) \geq 0 \text{ et } x-2 < 0$$

$$5) \Leftrightarrow x(x-2) = 2-x \Leftrightarrow x^2 - 2x = 2-x \Leftrightarrow x^2 - x - 2 = 0$$

$$\Delta = 9 = 3^2 \quad x_1 = \frac{1-3}{2} = -1 < 0, \quad x_2 = \frac{1+3}{2} = 2 > 0$$

$$\bullet \forall x \in [0; 2], \quad x(x-2) \leq 0 \text{ et } x-2 \leq 0$$

$$5) \Leftrightarrow -x(x-2) = 2-x \Leftrightarrow -x^2 + 2x = 2-x \Leftrightarrow x^2 - 3x + 2 = 0$$

$$\Delta = 9 - 8 = 1 \quad x_1 = \frac{3-1}{2} = 1 \in [0; 2], \quad x_2 = \frac{3+1}{2} = 2 \in [0; 2]$$

$$\bullet \forall x > 2, \quad x(x-2) > 0 \text{ et } x-2 > 0$$

$$5) \Leftrightarrow x(x-2) = x-2 \Leftrightarrow x^2 - 2x = x-2 \Leftrightarrow x^2 - 3x + 2 = 0$$

$$x_1 \leq 2 \text{ et } x_2 \leq 2.$$

$$J = \{-1, 1, 2\}$$

$$6) |x+2| \leq 2|x-1| \quad D = \mathbb{R}$$

$$\bullet \forall x < -2, \quad x+2 < 0 \text{ et } x-1 < 0 \quad 6) \Leftrightarrow -(x+2) \leq 2(1-x)$$

$$\Leftrightarrow -x-2 \leq 2-2x \Leftrightarrow x \leq 4. \quad \text{Vrai sur }]-\infty; -2[.$$

$$\bullet \forall x \in [-2; 1], \quad x+2 \geq 0 \text{ et } x-1 \leq 0$$

$$6) \Leftrightarrow x+2 \leq 2(1-x) \Leftrightarrow x+2 \leq 2-2x \Leftrightarrow 3x \leq 0$$

$$\text{Vrai sur } [-2; 0]$$

$$\bullet \forall x > 1, \quad x+2 > 0 \text{ et } x-1 > 0$$

$$6) \Leftrightarrow x+2 \leq 2(x-1) \Leftrightarrow 4 \leq x$$

$$\text{Vrai sur } [4; +\infty[$$

$$J =]-\infty; 0] \cup [4; +\infty[.$$

Exercice 1.4. Soit $f(x) = |x^2 - 1| - |2x + 2|$.

1. Exprimer $f(x)$ sans faire intervenir la valeur absolue.
2. Résoudre, dans $\mathbb{R}$, l'équation et l'inéquation suivantes :

(a) $|x^2 - 1| - |2x + 2| = 0$, (b) $|x^2 - 1| \geq |2x + 2|$.

1)

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$
$x^2 - 1$	+	0	- 0	+
$2x + 2$	-	0	+	+

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 + 2x + 2 = x^2 + 2x + 1 & \text{sur }]-\infty; -1] \\ 1 - x^2 - 2x - 2 = -x^2 - 2x - 1 & \text{sur }]-1; 1[\\ x^2 - 1 - 2x - 2 = x^2 - 2x - 3 & \text{sur } [1; +\infty[\end{cases}$$

2) a) $\Leftrightarrow f(x) = 0$

sur $]-\infty; -1]$, $x = -1$ OK

sur $]-1; 1[$ $x = 1$ ~~OK~~

sur $[1; +\infty[$ $x^2 - 2x - 3$, $\Delta = 16 = 4^2$ $x_1 = \frac{2-4}{2} = -1$ ~~OK~~
 $x_2 = \frac{2+4}{2} = 3$ OK

$$J = \{-1; 3\}$$

b) $\Leftrightarrow f(x) \geq 0$

sur $]-\infty; -1]$ toujours vrai

sur $]-1; 1[$ toujours faux

sur $[1; +\infty[$, vrai

sur $[3; +\infty[$

$$J =]-\infty; -1] \cup [3; +\infty[.$$

Exercice 1.5. Pour $x \in \mathbb{R}$, on note $\mathbb{E}(x)$ la partie entière de x .

1. Calculer $\mathbb{E}\left(\frac{1}{x}\right)$ et $\mathbb{E}\left(\frac{2}{x}\right)$ pour $x \geq 1$.

2. Résoudre, dans $\mathbb{R}$, les équations et la double inéquation suivantes :

(a) $\mathbb{E}(x) = -1$; (b) $\mathbb{E}(2x+1) = 1$; (c) $-1 \leq \mathbb{E}(x) \leq 1$.

1) $\mathbb{E}(y)$ est l'entier immédiatement $\leq y$.

$\forall x > 1, \quad \frac{1}{x} \in]0; 1[, \quad \mathbb{E}\left(\frac{1}{x}\right) = 0, \quad \mathbb{E}(1) = 1.$

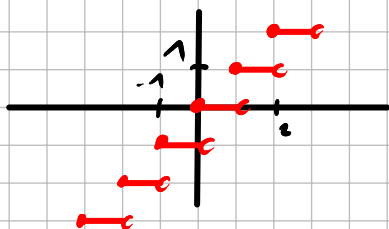
x	0	1	2	$+\infty$
$\frac{2}{x}$	$+\infty$	2	1	0

$$\mathbb{E}\left(\frac{2}{x}\right) = \begin{cases} 2 & \text{si } x=1 \\ 1 & \text{si } x \in]1; 2] \\ 0 & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

2) $\mathbb{E}(x) = -1 \Leftrightarrow x \in [-1; 0[$

$\mathbb{E}(2x+1) = 1 \Leftrightarrow 2x+1 \in [1; 2[\Leftrightarrow x \in [0; 1[$

$-1 \leq \mathbb{E}(x) \leq 1 \Leftrightarrow x \in [-1; 2[$



$\forall x \in \mathbb{R}$
 $\forall n \in \mathbb{Z}$

$\mathbb{E}(x) = n \Leftrightarrow n \leq x < n+1$

Exercice 1.6. Pour chacune des parties suivantes de $\mathbb{R}$, dire si elle est majorée, minorée, bornée. Si oui, donner sa borne supérieure et/ou inférieure :

6

$$A = \left\{ 1 + \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N} \right\}, \quad B = \left\{ 1 + \frac{(-1)^n}{n} \mid n \in \mathbb{N}^* \right\},$$

$$C = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid 1/2 \leq \sin(x) \leq \sqrt{3}/2 \right\}.$$

A. $\inf A = 1$ $\sup A = 2$ (atteint) A borné

B. $\inf B = 1 - 1 = 0$ $\sup B = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$ B borné

C. $\sin x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x \in \left\{ \frac{\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$

$\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow x \in \left\{ \frac{\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$

C n'est ni majoré ni minoré.

Exercice 1.7. Soit $A = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid 1 \leq \frac{x}{2} + \frac{1}{x+1} < 2 \right\}$. Montrer que A est la réunion de deux intervalles que l'on précisera, et puis déterminer, s'ils existent, les majorants, les minorants, la borne supérieure, la borne inférieure, le plus grand élément, le plus petit élément de A.

Soit $x \in \mathbb{R}$, $1 \leq \frac{x}{2} + \frac{1}{x+1} \Leftrightarrow \frac{x}{2} + \frac{1}{x+1} - 1 \geq 0 \Leftrightarrow \frac{x(x+1) + 2x - 2(x+1)}{2(x+1)} \geq 0$
 $\Leftrightarrow \frac{x^2 + x - 2}{2(x+1)} \geq 0$ $\Delta = 1 + 8 = 9$ $x_1 = \frac{-1-3}{2} = -2$ $x_2 = \frac{-1+3}{2} = 1$

$\Leftrightarrow \frac{(x+1)(x-1)}{x+1} \geq 0$

$\underbrace{g(x)}_{g(x)} \begin{array}{c|ccccccc} x & -\infty & -2 & -1 & 1 & +\infty \\ \hline g(x) & - & 0 & + & - & 0 & + \end{array}$

$J_1 = [-2; -1[\cup]1; +\infty[$

$\frac{x}{2} + \frac{1}{x+1} < 2 \Leftrightarrow \frac{x}{2} + \frac{1}{x+1} - 2 < 0 \Leftrightarrow \frac{x(x+1) + 2x - 2 \cdot 2(x+1)}{2(x+1)} < 0$

$\Leftrightarrow \frac{x^2 - x - 2}{2(x+1)} < 0$ $\Delta = 3^2$ $x_1 = \frac{1-3}{2} = -1$ $x_2 = \frac{1+3}{2} = 2$

$\underbrace{h(x)}_{h(x)} \begin{array}{c|ccccccc} x & -\infty & -1 & 2 & +\infty \\ \hline h(x) & - & 0 & - & 0 & + \end{array}$

$J_2 =]-\infty; -1[\cup]2; +\infty[$

$A = \left\{ 1 \leq f(x) < 2 \right\} = J_1 \cap J_2 = [-2; -1[\cup]1; 2[$

$\min A = \inf A = -2$, $\sup A = 2$, $\max(A)$ non défini.

Exercice 1.8. Encadrer les expressions $x + y$, $x - y$, xy et $\frac{x}{y}$ sachant que $x \in [3, 6]$ et $y \in [-4, -2]$.

$$\forall x \in [3; 6], \forall y \in [-4; -2]$$

1) $-1 \leq x + y \leq 4$

2) $5 \leq x - y \leq 10$

3) $-24 \leq xy \leq -6$

4) $\frac{1}{y} \in \left[-\frac{1}{2}; -\frac{1}{4}\right] \quad \frac{x}{y} \in \left[-\frac{6}{2}; -\frac{3}{4}\right]$

Exercice 1.9. Après avoir déterminé leur domaine de validité, résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations et les inéquations suivantes, d'inconnue x , et de paramètre $m \in \mathbb{R}$:

1. $\sqrt{1+x^2} - x = m$ 2. $\sqrt{5-x^2} < x+1$

3. $|2x-3| = x$ 4. $|x^2-2| \leq x$

5. $\sqrt{x^2+x-6} \leq \sqrt{x+3}$

1) $\sqrt{1+x^2} - x = m \quad \mathcal{D} = \mathbb{R}$

$\forall x \in \mathbb{R}, 1) \Leftrightarrow \sqrt{1+x^2} = x+m$

• Si $x \geq -m$, 1) $\Leftrightarrow 1+x^2 = (x+m)^2 \Leftrightarrow 1+x^2 = x^2+2mx+m^2$
 $\Leftrightarrow 2mx = 1-m^2 \Leftrightarrow x = \frac{1-m^2}{2m}$ et $m \neq 0$.

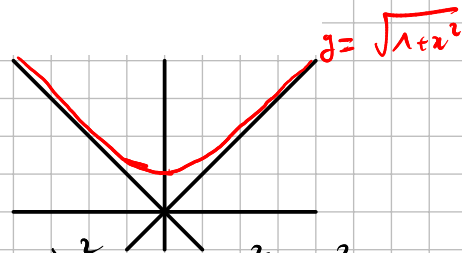
• Si $x < -m$, 1) est impossible.

$x \geq -m$ et $x = \frac{1-m^2}{2m}$

$\frac{1-m^2}{2m} \geq -m \Leftrightarrow \frac{1-m^2+2m^2}{2m} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{m^2+1}{2m} \geq 0$

$\Leftrightarrow \underline{m > 0}$

Si $m > 0$, $\mathcal{S} = \left\{ \frac{1-m^2}{2m} \right\}$
 Si $m \leq 0$, $\mathcal{S} = \emptyset$



2) $\mathcal{D} = [-\sqrt{5}; \sqrt{5}]$ si $x < -1$, $x+1 < 0$ et 2) impossible

si $x \in]-1; \sqrt{5}]$, 2) $\Leftrightarrow 5-x^2 < (x+1)^2 \Leftrightarrow 2x^2+2x-4 > 0$
 $\Leftrightarrow x^2+x-2 > 0 \Leftrightarrow (x-1)(x+2) > 0$, $]-\infty; -2[\cup]1; +\infty[$

$\mathcal{S} =]1; \sqrt{5}]$.

$$3) \quad |2x-3|=x \quad \text{s: } x < \frac{3}{2}, \quad |2x-3|=3-2x$$

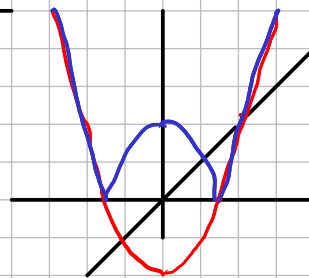
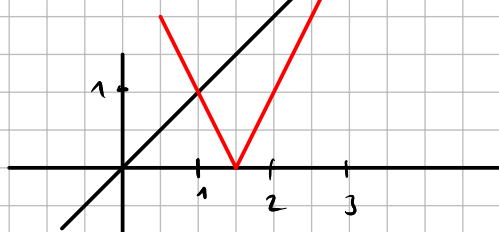
8

$$\text{et } 3) \Leftrightarrow 3-2x=x \Leftrightarrow x=1. \quad \left(1 < \frac{3}{2}\right)$$

$$\text{s: } x > \frac{3}{2}, \quad |2x-3|=2x-3$$

$$\text{et } 3) \Leftrightarrow 2x-3=x \Leftrightarrow x=3 \quad \left(3 > \frac{3}{2}\right)$$

$$\mathcal{J} = \left\{1; \frac{3}{2}\right\}$$



$$4) \quad |x^2-2| \leq x$$

$$\mathcal{D} = \mathbb{R}$$

$$\text{sur }]-\infty; 0], \quad 4) \text{ impossible}$$

$$\text{sur } [0; \sqrt{2}] \quad 4) \Leftrightarrow 2-x^2 \leq x \Leftrightarrow x^2+x-2 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (x-1)(x+2) \geq 0$$

$$\Delta = 1+8=9=3^2$$

$$x_1 = \frac{1-3}{2} = -1$$

$$x_2 = \frac{1+3}{2} = 2$$

$$[0; \sqrt{2}] \cap [1; 2] = [1; \sqrt{2}]$$

$$\text{sur }]\sqrt{2}; +\infty[\quad 4) \Leftrightarrow x^2-2 \leq x \Leftrightarrow x^2-x-2 \leq 0$$

$$\Leftrightarrow (x+1)(x-2) \leq 0$$

$$[-1; 2] \cap]\sqrt{2}; +\infty[= [\sqrt{2}; 2]$$

$$\mathcal{J} = [1; \sqrt{2}] \cup [\sqrt{2}; 2] = [1; 2]$$

$$5) \sqrt{x^2+x-6} \leq \sqrt{x+3}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{D} &= [-3; +\infty[\cap \left\{ x \in \mathbb{R} \mid (x+3)(x-2) \geq 0 \right\} \\ &= [-3; +\infty[\cap \left(]-\infty; -3] \cup [2; +\infty[\right) \\ &= \{-3\} \cup [2; +\infty[\end{aligned}$$

en -3 c'est vrai

$$\text{sur } [2; +\infty[, \quad 5) \Leftrightarrow x^2+x-6 \leq x+3 \Leftrightarrow x^2-9 \leq 0$$

$$\Leftrightarrow x \in [-3; 3]$$

$$\mathcal{Y} = \{-3\} \cup [2; 3].$$