

Licence MIA SHS

Semestre 1

TD - Analyse 1

Important. Le programme est découpé en quatre chapitres. Le volume horaire total en heures TD est de 36 heures, il est souhaitable que les enseignants de TD respectent, approximativement, la répartition suivante :

1. **Nombres réels** (1 semaine)
2. **Suites réelles** (2 semaines)
3. **Fonctions réelles** (4 semaines)
4. **Fonctions usuelles** (3 semaines)

Conseils aux étudiants. Pour acquérir les différentes notions abordées dans cette partie, outre une bonne connaissance du cours, il vous est fortement conseillé de fournir un travail personnel en traitant par vous-mêmes le maximum d'exercices.

Ce fascicule se veut un instrument de travail, tant dans le cadre des exercices résolus en travaux dirigés que dans celui de votre travail personnel. Il y a beaucoup plus d'exercices que ce que l'on peut raisonnablement traiter pendant les séances de travaux dirigés, ceci est volontaire et on vous encourage à travailler les exercices qui n'ont pas été vus en TD.

Nombres réels

Exercice 1.1. Soit a , b et c trois nombres réels.

1. Démontrer que $ab \leq \frac{a^2 + b^2}{2}$.
2. Démontrer que $ab + ac + bc \leq a^2 + b^2 + c^2$.
3. Démontrer que $3ab + 3ac + 3bc \leq (a + b + c)^2$.

Exercice 1.2.

1. Soit $x \in [1, 2]$. Encadrer rapidement le réel $\frac{2x+1}{3x^2+4}$.
2. Montrer que, pour tout $x > 0$, $x + \frac{1}{x} \geq 2$.

Exercice 1.3. Après avoir déterminé leur domaine de validité, résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations et les inéquations suivantes, d'inconnue x , et de paramètre $m \in \mathbb{R}$:

1. $\frac{x-1}{x+1} + \frac{1}{x} = m$
2. $\frac{x-2}{x+2} + \frac{1}{x-1} \geq 0$
3. $\sqrt{x-x^2} = x-1$
4. $|2x-5| = x+1$
5. $|x(x-2)| = |x-2|$
6. $|x+2| \leq 2|x-1|$.

Exercice 1.4. Soit $f(x) = |x^2 - 1| - |2x + 2|$.

1. Exprimer $f(x)$ sans faire intervenir la valeur absolue.
2. Résoudre, dans $\mathbb{R}$, l'équation et l'inéquation suivantes :

$$(a) |x^2 - 1| - |2x + 2| = 0, \quad (b) |x^2 - 1| \geq |2x + 2|.$$

Exercice 1.5. Pour $x \in \mathbb{R}$, on note $\mathbb{E}(x)$ la partie entière de x .

1. Calculer $\mathbb{E}\left(\frac{1}{x}\right)$ et $\mathbb{E}\left(\frac{2}{x}\right)$ pour $x \geq 1$.
2. Résoudre, dans $\mathbb{R}$, les équations et la double inéquation suivantes :

$$(a) \mathbb{E}(x) = -1; \quad (b) \mathbb{E}(2x+1) = 1; \quad (c) -1 \leq \mathbb{E}(x) \leq 1.$$

Exercice 1.6. Pour chacune des parties suivantes de $\mathbb{R}$, dire si elle est majorée, minorée, bornée. Si oui, donner sa borne supérieure et/ou inférieure :

$$A = \left\{ 1 + \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N} \right\}, \quad B = \left\{ 1 + \frac{(-1)^n}{n} \mid n \in \mathbb{N}^* \right\},$$

$$C = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid 1/2 \leq \sin(x) \leq \sqrt{3}/2 \right\}.$$

Exercice 1.7. Soit $A = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid 1 \leq \frac{x}{2} + \frac{1}{x+1} < 2 \right\}$. Montrer que A est la réunion des deux intervalles que l'on précisera, et puis déterminer, s'ils existent, les majorants, les minorants, la borne supérieure, la borne inférieure, le plus grand élément, le plus petit élément de A .

Exercices supplémentaires

Exercice 1.8. Encadrer les expressions $x + y$, $x - y$, xy et $\frac{x}{y}$ sachant que $x \in [3, 6]$ et $y \in [-4, -2]$.

Exercice 1.9. Après avoir déterminé leur domaine de validité, résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations et les inéquations suivantes, d'inconnue x , et de paramètre $m \in \mathbb{R}$:

1. $\sqrt{1+x^2} - x = m$ 2. $\sqrt{5-x^2} < x+1$

3. $|2x-3| = x$ 4. $|x^2-2| \leq x$

5. $\sqrt{x^2+x-6} \leq \sqrt{x+3}$

Suites réelles

Exercice 2.1. Étudier la convergence des suites suivantes, données par leur terme général :

$$\begin{array}{lll}
 1. u_n = \frac{n^2 + 1}{2n^3 + 1} & 2. u_n = \sqrt{n^2 + n} - n & 3. u_n = 2^{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\dots+\frac{1}{2^n}} \\
 4. u_n = \frac{2n^3 - 1}{n^2 + 1}, & 5. u_n = \frac{n^2 + 1}{n - 1} - n & 6. u_n = \frac{n + 1}{n} + \frac{(-2)^n}{3^n} \\
 7. u_n = 4^n + (-3)^n & 8. u_n = \frac{2^{n+1} + 3^{n+1}}{2^n + 3^n} & 9. u_n = \frac{\pi^n}{2^{2n}} + \cos\left(\frac{3^n}{2^{2n}}\right).
 \end{array}$$

Exercice 2.2. Étudier la convergence des suites définies par leur terme général suivant :

$$\begin{array}{lll}
 1. u_n = \frac{n - (-1)^n}{n + (-1)^n} & 2. u_n = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{n}\right)^n & 3. u_n = (-2)^n + 2^n \\
 4. u_n = \frac{n + (-1)^n n}{2n + 1} & 5. u_n = \frac{n2^{2n} - 3^n}{n2^{2n} + 3^n} & 6. u_n = \sin\left(\frac{2n\pi}{3}\right).
 \end{array}$$

Exercice 2.3. Étudier, à l'aide du théorème d'encadrement, la nature des suites définies par :

$$\begin{array}{lll}
 1. u_n = \sqrt[n]{3 - \sin(n^2)} & 2. u_n = \frac{\sin(1 + n^2)}{\sqrt{n}} & 3. u_n = \sin(n) + n \\
 4. u_n = \cos(n) \sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) & 5. u_n = \left(\frac{\sin(n)}{2}\right)^n & 6. u_n = \sqrt[n]{2 + (-1)^n}.
 \end{array}$$

Exercice 2.4. On définit la suite réelle $(u_n)_{n \geq 1}$ en posant, pour tout entier naturel $n \geq 1$,

$$u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k!} = 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{n!}$$

1. Étudier le sens de variation de la suite (u_n) .
2. Démontrer par récurrence que, pour tout entier $k \geq 1$, $k! \geq 2^{k-1}$.
3. En déduire que, pour tout $n \geq 1$, $u_n \leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{2^{k-1}}$, puis que $u_n \leq 2$.
4. Justifier que la suite (u_n) converge vers un nombre réel ℓ .

Exercice 2.5. Soit la suite définie par $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = \frac{u_n + 1}{u_n + 2}$ pour $n \geq 0$.

1. Montrer que, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq u_n$.
2. Montrer que l'équation $x = \frac{x+1}{x+2}$ admet une seule solution positive ℓ .
3. Montrer que, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $|u_{n+1} - \ell| \leq \frac{1}{4}|u_n - \ell|$.
4. Montrer que, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $|u_n - \ell| \leq \frac{1}{4^n}|u_0 - \ell|$.

5. En déduire que la suite (u_n) est convergente. Quelle est sa limite ?

Exercice 2.6. Étudier la nature de la suite (u_n) de terme général

$$u_n = \left| \frac{1}{n} - \frac{2}{n} + \frac{3}{n} - \frac{4}{n} + \cdots + \frac{(-1)^{n-1}n}{n} \right|.$$

On pourra considérer les sous-suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) .

Exercice 2.7. Montrer que les deux suites $(u_n)_{n \geq 1}$ et $(v_n)_{n \geq 1}$ sont convergentes et qu'elles convergent vers la même limite dans les cas suivants :

1. $u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2}$ et $v_n = u_n + \frac{1}{n}$.

2. $u_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} = 1 + \frac{1}{1!} + \cdots + \frac{1}{n!}$ et $v_n = u_n + \frac{1}{n \cdot n!}$.

Exercice 2.8. Pour tout $n \geq 1$, on pose $u_n = \sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^k}{k}$ et $v_n = \sum_{k=1}^{2n+1} \frac{(-1)^k}{k}$.

1. Montrer que les suites $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ sont adjacentes.

2. Que dire de la suite (w_n) de terme général $w_n = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^k}{k}$?

Exercices supplémentaires

Exercice 2.9. En justifiant la réponse, dire si les énoncés suivants sont vrais ou faux :

1. Toute suite croissante à partir d'un certain rang est minorée.
2. Une suite décroissante minorée par 0 converge vers 0.
3. Si une suite est non majorée, alors elle tend vers $+\infty$.
4. Soit une suite qui tend vers $+\infty$. Alors elle est croissante à partir d'un certain rang.
5. Soit (u_n) et (v_n) deux suites telles que $u_n < v_n$. Si ces deux suites sont convergentes, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n < \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$.
6. Si les deux sous-suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont convergentes, alors la suite (u_n) est aussi convergente.

Exercice 2.10. Soit $a > 0$ et $(u_n)_{n \geq 0}$ la suite définie par $u_0 > 0$ et $u_{n+1} = \frac{u_n^2 + a^2}{2u_n}$.

1. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n \geq a$, et puis que $(u_n)_{n \geq 1}$ est décroissante.
2. Justifier que la suite (u_n) est convergente.
3. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $|u_{n+1} - a| \leq \frac{|u_1 - a|}{2^n}$. En déduire la limite de la suite (u_n) .

Exercice 2.11. Soient $(u_n)_{n \geq 0}$ et $(v_n)_{n \geq 0}$ les suites définies par

$$u_0 = 1, \quad v_0 = 2, \quad u_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2} \quad \text{et} \quad v_{n+1} = \frac{2}{v_{n+1}}.$$

1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 < u_n \leq u_{n+1} \leq v_{n+1} \leq v_n$.
2. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq v_{n+1} - u_{n+1} \leq \frac{v_n - u_n}{2}$.
3. Montrer que les suites (u_n) et (v_n) convergent vers une même limite. On calculera la valeur de cette limite.

Fonctions réelles

Exercice 3.1. En justifiant les calculs, déterminer, lorsqu'elles existent, les limites suivantes :

$$\begin{array}{lll} 1. \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 + 1}{x + 1} & 2. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - \sqrt{x}}{x - 1} & 3. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 1} \\ 4. \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x - 4}{\sqrt{x} - 2} & 5. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1 - x}{x^2 - 4} & 6. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - 1}{x}. \end{array}$$

Exercice 3.2. En justifiant les calculs, déterminer, lorsqu'elles existent, les limites suivantes :

$$\begin{array}{ll} 1. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \cos(1 + x^2)}{1 + x^2} & 2. \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^3 + x^2}{x^2 - 1} - x \right) \\ 3. \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\sqrt{x^2 + x} - x \right) & 4. \lim_{x \rightarrow +\infty} \cos \left(\frac{\pi x - 1}{2x + 1} \right). \end{array}$$

Exercice 3.3. On rappelle que $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$.

1. Montrer que $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$.

2. Calculer les limites suivantes :

$$\begin{array}{ll} \text{(a)} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(2x)}{\sin(3x)} & \text{(b)} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin(x) - \sin(2x)}{x^3} \\ \text{(c)} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \sin(x)}{1 - \cos(x)} & \text{(d)} \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} \sin \left(\frac{1}{\sqrt{x}} \right). \end{array}$$

Exercice 3.4. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x < 0 \\ x^2 & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ \sqrt{x} & \text{si } 1 < x. \end{cases}$$

1. La fonction f est-elle continue ?
2. Montrer que f est bijective et déterminer f^{-1} .
3. Tracer les graphes de f et de f^{-1} dans un même repère orthonormé.

Exercice 3.5. Soit $n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$ et f_n la fonction définie sur $[1, +\infty[$ par $f_n(x) = x^n - x - 1$.

1. Vérifier que f_n est strictement croissante sur $[1, +\infty[$.
2. Montrer qu'il existe un unique $x_n \in]1, +\infty[$ tel que $f_n(x_n) = 0$.
3. Montrer que $f_{n+1}(x_n) > 0$.
4. En déduire que la suite (x_n) est décroissante et qu'elle converge vers une limite ℓ .
5. On suppose que $\ell > 1$, calculer la limite de x_n^n lorsque n tend vers $+\infty$.
6. En déduire la limite de la suite (x_n) .

Exercice 3.6. Déterminer les domaines de définition et de dérivabilité de la fonction réelle f et calculer la dérivée f' dans les cas suivants :

$$\begin{array}{lll} 1. f(x) = \frac{1+x}{1-x} & 2. f(x) = \sqrt{1+2x^3} & 3. f(x) = \frac{\sin x}{1+\cos x} \\ 4. f(x) = \frac{x}{1+x^2} & 5. f(x) = \frac{1}{(1+x^2)^2} & 6. f(x) = \sqrt{2\sin(x)-1} \\ 7. f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} & 8. f(x) = \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} & 9. f(x) = \frac{1}{1-2\cos(x)}. \end{array}$$

Exercice 3.7. Déterminer les domaines de continuité et de dérivabilité de la fonction f dans les cas suivants :

$$1. f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 + \sqrt{x^2}}{|x|} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0. \end{cases} \quad 2. f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

On calculera la dérivée de f sur le domaine approprié.

Exercice 3.8. Déterminer le réel a de sorte que la fonction f définie par l'expression suivante soit continue sur $\mathbb{R}$:

$$f(x) = \begin{cases} x \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x < 0 \\ a & \text{si } x = 0 \\ \frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x} & \text{si } 0 < x. \end{cases}$$

La fonction f est-elle alors dérivable sur $\mathbb{R}$? On calculera $f'(x)$ au point x où f est dérivable.

Exercice 3.9. Soit la fonction f définie sur $[-1, +\infty[$ par $f(x) = \sqrt{x^2(x+1)}$.

1. Étudier la dérivabilité de f en -1 et en 0 .
2. Calculer $f'(x)$ pour $x \neq -1$ et $x \neq 0$. En déduire les variations de f .
3. Calculer la limite de f en $+\infty$ puis dresser le tableau des variations de f .
4. Tracer le graphe de f .
5. Montrer que la restriction g de f à $[0, +\infty[$ réalise une bijection de $[0, +\infty[$ sur $[0, +\infty[$.
6. Justifier que g^{-1} est dérivable sur $[0, +\infty[$. Quelle est la valeur de $(g^{-1})'_d(0)$?

Exercice 3.10. Étudier la fonction f dans les cas suivants :

$$1. f(x) = \frac{x+1}{x-1} \quad 2. f(x) = \frac{x^2-x-1}{x-2} \quad 3. f(x) = \frac{\sqrt{x^2-1}}{x}.$$

On précisera le domaine de définition, les limites aux bornes et branches infinies, sens de variation et convexité et on tracera le graphe de f .

Exercices supplémentaires

Exercice 3.11. Déterminer les domaines de définition des fonctions f , g , $f \circ g$ et $g \circ f$ ainsi que les expressions des composées $f \circ g$ et $g \circ f$ dans les cas suivants :

1. $f(x) = \sqrt{x}$ et $g(x) = x^2 - 2x + 4$,
2. $f(x) = \sqrt{x}$ et $g(x) = x^2 + x - 2$,
3. $f(x) = \frac{1+x}{1-x}$ et $g(x) = \frac{x}{1-x}$,
4. $f(x) = \frac{x}{1+x^2}$ et $g(x) = \frac{1}{x}$.

Exercice 3.12. Soit $f(x) = \frac{x}{1+x}$. On note $f^1 = f$ et, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $f^{n+1} = f \circ f^n$.

1. Donner le domaine de définition de f .
2. Montrer que f est strictement croissante sur $]-\infty, -1[$ et sur $]-1, +\infty[$.
3. Calculer f^2 et f^3 après avoir déterminé leur domaine de définition.
4. Proposer une expression de $f^n(x)$ et prouver celle-ci par récurrence.

Exercice 3.13. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) = |x+1| + |x-1| - 4$.

1. Montrer que f est paire.
2. Donner une expression de f ne faisant pas intervenir la valeur absolue.
3. Étudier la continuité de f et tracer le graphe de f .
4. Résoudre, dans $\mathbb{R}$, l'équation et l'inéquation suivantes :

$$(a) |x+1| + |x-1| = 4, \quad (b) |x+1| + |x-1| \leq 4.$$

Exercice 3.14. Soit f la fonction définie par $f(x) = \frac{1}{(x-1)^3} + \frac{1}{(x-2)^5}$ et soit l'équation $(E) : f(x) = 0$.

1. Étudier brièvement les variations de f .
2. Montrer que l'équation (E) admet une unique solution dans $]1, 2[$.
3. Montrer que (E) n'admet pas de solution dans les intervalles $]-\infty, 1[$ et $]2, +\infty[$.

Exercice 3.15. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et f_n la fonction définie sur $[0, 1]$ par $f_n(x) = x^n + x - 1$.

1. Montrer qu'il existe un unique $x_n \in]0, 1[$ tel que $f_n(x_n) = 0$.
2. Montrer que $f_{n+1}(x_n) < 0$.
3. En déduire que la suite (x_n) est croissante et qu'elle converge vers une limite ℓ .
4. Justifier que $0 \leq \ell^n + \ell - 1$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, puis déterminer ℓ .

Exercice 3.16. En justifiant les calculs, déterminer, lorsqu'elles existent, les limites suivantes :

1. $\lim_{x \rightarrow 0} \left(x + \frac{|x|}{x} \right)$
2. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sin \left(\frac{\pi \mathbb{E}(x)}{2x+1} \right)$
3. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(2x)}{3x}$
4. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin(x)}{\sqrt{x}}$.

Exercice 3.17. Soit a et b deux réels avec b strictement positif. Soit la fonction $f :]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ telle que

$$f(x) = \begin{cases} a\sqrt{x} & \text{si } x < b \\ x^2 + 1 & \text{si } b \leq x. \end{cases}$$

Déterminer les réels a et b pour lesquels f est dérivables sur $]0, +\infty[$.

Exercice 3.18. Étudier la fonction f dans les cas suivants :

$$1. f(x) = \frac{x}{1+x^2} \qquad 2. f(x) = \sqrt{\frac{x+1}{x-1}}.$$

On précisera le domaine de définition, les limites aux bornes et branches infinies, sens de variation, convexité et points d'inflexion et on tracera le graphe.

Exercice 3.19. Soit la fonction f définie par $f(x) = \sqrt{x^2 - 4x + 8}$.

1. Déterminer le domaine de définition de f .
2. Étudier les variations de f .
3. Montrer que f réalise une bijection de $I = [2, +\infty[$ sur son image (à préciser).
4. Justifier que la fonction réciproque de f est continue et déterminer celle-ci.

Exercice 3.20. Soit $f(x) = x^4 - x^3 + 1$.

1. Déterminer les points critiques de f et préciser la nature de ceux-ci.
2. Étudier la convexité de f .
3. En déduire que f admet deux points d'inflexion et déterminer la tangente au graphe de f en ces points.

Fonctions usuelles

Exercice 4.1. Simplifier les expressions suivantes, en précisant éventuellement le domaine de validité :

$$1. e^{-2\ln(5)} - e^{-3\ln(5)} \quad 2. 3e^{\ln(x/3)} - 3\ln(e^{x/3}) \quad 3. e^{2\ln|x-1|-2\ln(x^2-1)}.$$

Exercice 4.2. Simplifier les expressions suivantes :

$$1. \arcsin\left(\sin\frac{25\pi}{7}\right) \quad 2. \arccos\left(\cos\frac{215\pi}{7}\right) \\ 3. \arctan\left(\tan\frac{74\pi}{9}\right) \quad 4. \arcsin\left(\cos\frac{53\pi}{5}\right).$$

Exercice 4.3. Montrer que

$$1. 2\arccos\left(\frac{3}{4}\right) = \arccos\left(\frac{1}{8}\right) \quad 2. \arccos\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right) + \arccos\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right) = \frac{\pi}{2} \\ 3. 2\arctan\left(\frac{1}{2}\right) = \arctan\left(\frac{4}{3}\right) \quad 4. \arcsin\left(\frac{4}{5}\right) + \arcsin\left(\frac{3}{5}\right) = \frac{\pi}{2}.$$

Exercice 4.4. Résoudre les équations et les inéquations suivantes après avoir déterminé leur domaine de validité :

$$1. \ln\left(\frac{x+3}{2}\right) = \frac{1}{2}[\ln(x) + \ln(3)] \quad 2. \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right) = -\ln(2) \\ 3. \ln(x+1) - \ln(x-1) = -\ln(2) \quad 4. \ln(x+4) + \ln(2x) = 2\ln(x) \\ 5. \ln(\sqrt{x-3}) \leq \ln(6-x) - \frac{1}{2}\ln(x) \quad 6. \ln(x^2-2x) > \ln(4x-5).$$

Exercice 4.5. Résoudre les équations et les inéquations suivantes après avoir déterminé leur domaine de validité :

$$1. e^{2x+1} - 1 = 0 \quad 2. e^x + 3e^{-x} - 4 = 0 \\ 3. e^x - e^{2x} \leq 0 \quad 4. e^{2x+5} - e^{1-x} < 0.$$

Exercice 4.6. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

$$1. \arccos(x) = 2\arcsin\left(\frac{2}{3}\right) + \frac{\pi}{2} \quad 2. \arcsin(x) = \arcsin\left(\frac{4}{5}\right) + \arcsin\left(\frac{6}{13}\right) \\ 3. \arctan(x) = 4\arctan\left(\frac{1}{3}\right) - \frac{\pi}{4} \quad 4. \arcsin(x) = \arccos\left(\frac{1}{3}\right) + \arccos\left(\frac{1}{4}\right).$$

Exercice 4.7. En justifiant les calculs, déterminer, lorsqu'elles existent, les limites suivantes :

1. $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x \ln x}{\ln(x+1)}$
2. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x - \ln x)$
3. $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left[2 + \sin\left(\frac{1}{x}\right) \right] \ln(x)$
4. $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{x^2-5x+1}$
5. $\lim_{x \rightarrow -\infty} (e^{2x} - e^{-x})$
6. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{e^{2x} + x}{e^x - 1} - e^x \right)$
7. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x^2}$
8. $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{x-\sin(x)}$
9. $\lim_{x \rightarrow +\infty} [\ln(1 + e^x) - x]$.

Exercice 4.8. Soit f la fonction définie par $f(x) = \sqrt{x} \left(e^{\frac{1}{x}} - 1 \right) \sin(x)$.

1. Déterminer les domaines de définition et de continuité de f .
2. Montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} \left(e^{\frac{1}{x}} - 1 \right) = 0$.
3. Calculer les limites de f aux bornes de son domaine de définition.

Exercice 4.9. Calculer la dérivée f' de la fonction f en précisant les domaines de définition de f et de f' dans les cas suivants :

1. $f(x) = \ln(x^2 - 2x)$
2. $f(x) = (1+x)^{\frac{1}{x}}$
3. $f(x) = e^{-x^2} \sqrt{x(x+2)}$
4. $f(x) = \frac{e^{1+x}}{\sqrt{1-x}}$
5. $f(x) = \ln \left| \frac{1+x}{1-x} \right|$
6. $f(x) = \ln \left(x + \sqrt{x^2 + 1} \right)$.

Exercice 4.10. Soit f la fonction définie par $f(x) = \ln(e^x - e^{-x})$.

1. Étudier la fonction f et construire son graphe.
2. Montrer que f réalise une bijection de $]0, +\infty[$ sur un intervalle J à préciser, et déterminer l'expression de f^{-1} .

Exercice 4.11. Soit $f(x) = (1+x)^x$ et $g(x) = \ln(1+x) + \frac{x}{1+x}$.

1. Vérifier que f et g ont le même domaine de définition D que l'on déterminera.
2. Calculer les limites de f aux bornes de son domaine de définition.
3. Montrer que, pour tout $x \in D$, $f'(x)$ est du même signe que $g(x)$.
4. Étudier les variations de la fonction g et en déduire le signe de f' . On remarquera que $g(0) = 0$.
5. Dresser le tableau de variations et tracer le graphe de f .

Exercice 4.12. Montrer que, pour tout réel x non nul,

$$\arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right) = \begin{cases} -\frac{\pi}{2} & \text{si } x < 0 \\ \frac{\pi}{2} & \text{si } x > 0. \end{cases}$$

Exercice 4.13. Étudier et représenter les fonctions suivantes :

$$x \mapsto \arcsin(\sin x), \quad x \mapsto \arccos(\cos x), \quad x \mapsto \arctan(\tan x).$$

Exercice 4.14. Soit f la fonction définie par $f(x) = \arccos(2x) + \arccos(x)$.

1. Déterminer le domaine de définition D_f de f .
2. Préciser les variations de f , et en déduire que f réalise une bijection de D_f sur un intervalle J à préciser.
3. On considère l'équation $(E) : f(x) = \frac{\pi}{2}$.
 - (a) Montrer que, pour tout $x \in [-1, 1]$, $\sin[\arccos(x)] = \sqrt{1 - x^2}$.
 - (b) Montrer que l'équation (E) admet une unique solution et, puis, déterminer celle-ci.

Exercice 4.15. Soit f la fonction définie par $f(x) = \arccos(1 - 2x^2)$.

1. Déterminer le domaine de définition D_f et préciser la parité de f .
2. Pour $x \in [0, 1]$, on pose $x = \sin t$ avec $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. Calculer et simplifier $f(\sin t)$.
3. En déduire une expression simple de f d'abord sur $[0, 1]$ et puis sur D_f .
4. Tracer le graphe de f .

Exercice 4.16. Soit f la fonction définie par $f(x) = \arcsin\left(2x\sqrt{1 - x^2}\right)$.

1. Étudier les variations de la fonction u définie par $u(x) = 2x\sqrt{1 - x^2}$.
2. En déduire le domaine de définition et préciser la parité de f .
3. Calculer $f'(x)$ pour $x \in [0, 1[\setminus \{1/\sqrt{2}\}$ et en déduire une expression simple de f sur $[0, 1]$.
4. Étudier la dérivabilité de f en $1/\sqrt{2}$ et en 1.
5. Tracer le graphe de f .

Exercice 4.17. Étudier la fonction f dans les cas suivants :

1. $f(x) = \ln(x + 1) - \ln(x)$
2. $f(x) = x + \ln\left(\frac{x + 1}{x - 1}\right)$
3. $f(x) = \frac{1}{e^x - 1} - x - 1$
4. $f(x) = (x + 2)e^{\frac{1}{x}}$.

On précisera le domaine de définition, les limites aux bornes et branches infinies, sens de variation et convexité et on tracera le graphe de f .

Exercice 4.18. Étudier la fonction f dans les cas suivants :

1. $f(x) = \arcsin(\sqrt{1 - x^2})$
2. $f(x) = \arctan\left(\frac{x}{\sqrt{1 - x^2}}\right)$
3. $f(x) = \arcsin\left(\frac{2x}{1 + x^2}\right)$
3. $f(x) = \arccos\left(\frac{1}{\sqrt{1 + x^2}}\right)$
5. $f(x) = \arctan\left(\frac{2x}{1 - x^2}\right)$
6. $f(x) = \arcsin\left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}\right)$.

On simplifiera les expressions proposées après le calcul de la dérivée le cas échéant.

Exercices supplémentaires

Exercice 4.19. Résoudre les équations et les inéquations suivantes après avoir donné leur domaine de validité :

1. $\ln(x-1) = \ln(3x-5)$
2. $\ln(x+4) + \ln(2x) = 2\ln(x)$
3. $\ln(x^2+x) = \ln(x+1)$
4. $\ln(x+1) + \ln(x-1) = \ln(3)$
5. $\ln(3-x) + 1 > 0$,
6. $\ln(x+1) + \ln(x-1) \leq \ln(3)$.

Exercice 4.20. Résoudre, dans $\mathbb{R}$, les équations et les inéquations suivantes après avoir donné leur domaine de validité :

1. $e^x - 2xe^x = 0$
2. $e^{2x} - 2e^x = 0$
3. $e^{2x} - e^{1-x} \leq 0$
4. $3^{2x+1} + 3^{2x} = 4^{x+1}$.

Exercice 4.21.

1. Montrer que, pour tout $x \in [-1, 1]$, on a : $\arccos(x) + \arcsin(x) = \frac{\pi}{2}$.
2. Montrer que, pour tout $x \in [-1, 1]$, on a : $\arccos(x) + \arccos(-x) = \pi$.

Exercice 4.22. Soit $f(x) = x^5 - 3x - 1$ et $g(x) = x2^x - 1$.

1. Montrer que $f(x) = 0$ admet une solution dans $[1, 2]$.
2. Montrer que $g(x) = 0$ admet une solution dans $[0, 1]$.
3. Montrer que $f(x) = g(x)$ admet une solution dans $]0, 2]$.

Exercice 4.23.

1. Montrer que $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln(x)}{x-1} = 1$.
2. En déduire les limites suivantes : $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\ln(1-t)}{t}$ et $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\ln(1-t^2)}{t}$.
3. Montrer que la fonction f définie sur $D = [0, +\infty[$ par l'expression suivante est continue sur D :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x \ln(x)}{x^2-1} & \text{si } x \in]0, +\infty[\setminus \{1\} \\ 0 & \text{si } x = 0 \\ \frac{1}{2} & \text{si } x = 1. \end{cases}$$

Exercice 4.24. Étudier la continuité en 0 de la fonction f dans les cas suivants :

1. $f(x) = \begin{cases} \frac{\sin(x)}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$
2. $f(x) = \begin{cases} \frac{1 - \cos(x)}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$
3. $f(x) = \begin{cases} \frac{1 - \cos(x)}{x^2} & \text{si } x \neq 0 \\ \frac{1}{2} & \text{si } x = 0 \end{cases}$
4. $f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x+9}-3}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ \frac{1}{6} & \text{si } x = 0 \end{cases}$
5. $f(x) = \begin{cases} \frac{\ln(1+x)}{e^x-1} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$
6. $f(x) = \begin{cases} x\mathbb{E}\left(x - \frac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ -1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

Exercice 4.25. Dans chacun des cas suivants, dire si la fonction f se prolonge par continuité au point x_0 proposé :

1. $f(x) = \frac{\sin(x)}{\sqrt{1+x}-1}$ et $x_0 = 0$,
2. $f(x) = \frac{x-2}{\sqrt{x}-\sqrt{2}}$ et $x_0 = 2$,
3. $f(x) = \frac{\sin(\pi x)}{\ln(x)}$ et $x_0 = 1$,
4. $f(x) = \frac{x(e^x - e^{-x})}{1 - \cos(x)}$ et $x_0 = 0$.

Exercice 4.26. Soit f la fonction définie par $f(x) = \arccos\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)$.

1. Déterminer le domaine de définition $\mathcal{D}_f$ et préciser la parité de f .
2. Calculer $f'(x)$ sur $]0, +\infty[$ pour en déduire une expression simple de f d'abord sur $]0, +\infty[$ puis sur $] -\infty, 0]$.
3. Étudier la dérivabilité de f en 0.
4. Tracer le graphe de f .

Exercice 4.27. Soit f la fonction définie par

$$f(x) = \begin{cases} e^{-x} + 1 & \text{si } x \leq 0 \\ 2 + x \ln(x) & \text{si } 0 < x. \end{cases}$$

1. Étudier la continuité et la dérivabilité de f en 0.
2. Calculer $f'(x)$ en tout point x où f est dérivable.
3. Étudier les variations et tracer le graphe de f .

Exercice 4.28. Soit f la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par $f(x) = x - 2 + \ln(x)$.

1. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution dans $]1, 2[$.
2. Montrer que f est bijective de $]0, +\infty[$ sur $\mathbb{R}$. On note g sa réciproque.
3. Étudier la continuité et dresser le tableau de variations de g .
4. Tracer les graphes de f et g dans un même repère orthonormé.