

Licence MIASHS

Semestre 1

Analyse 1

Abdellah HANANI

L'objectif principal de cette partie est de consolider et d'approfondir les connaissances acquises au lycée. Les définitions et les énoncés des résultats seront présentés avec rigueur, bien que toutes les démonstrations ne soient pas exigées.

L'accent est mis sur la maîtrise du calcul en analyse, indispensable pour les étudiants, sans pour autant négliger la qualité de la rédaction. Les solutions devront être détaillées et rigoureusement argumentées, notamment par l'application de théorèmes dont les hypothèses auront été soigneusement vérifiées.

Si une excellente connaissance du cours est nécessaire, elle reste insuffisante. Pour s'approprier ces notions, les étudiants doivent s'investir pleinement dans un travail personnel régulier, en préparant et en cherchant les exercices de TD.

Le programme se décompose en quatre parties :

- 1. Les nombres réels** (3 heures)
- 2. Suites réelles** (4 heures)
- 3. Fonctions réelles** (9 heures)
- 4. Fonctions usuelles** (6 heures)

Chaque chapitre est accompagné d'une fiche d'exercices principaux et supplémentaires, dont une grande partie sera traitée en travaux dirigés. Pour progresser efficacement, il est fortement conseillé aux étudiants de chercher un maximum d'exercices par eux-mêmes.

Table des matières

1	Les nombres réels	1
1.1	Rappel des règles de calcul	1
1.2	Droite réelle achevée, intervalles et voisinages	2
1.3	Borne supérieure, borne inférieure	3
1.4	Outils de calculs sur les réels	4
1.4.1	La partie entière d'un réel	4
1.4.2	Valeur absolue	5
1.4.3	Puissances et racines n-ièmes	5
2	Suites réelles	8
2.1	Définitions générales et vocabulaire	8
2.2	Limites de suites et convergence	9
2.3	Opérations sur les limites	10
2.4	Théorèmes fondamentaux de convergence	11
2.4.1	Théorème d'encadrement	11
2.4.2	Théorème des suites extraites	12
2.4.3	Suites monotones et suites adjacentes	13
3	Fonctions réelles	16
3.1	Généralités sur les fonctions	16
3.1.1	Définitions et préliminaires	16
3.1.2	Propriétés des fonctions réelles	17
3.2	Limites des fonctions réelles	19
3.2.1	Définitions et généralités	19
3.2.2	Propriété des limites	21
3.3	Continuité des fonctions réelles	24
3.3.1	Continuité en un point	24
3.3.2	Fonctions continues sur un intervalle	25
3.3.3	Théorème de la bijection	26
3.4	Dérivabilité des fonctions réelles	27
3.4.1	Dérivée d'une fonction	27
3.4.2	Techniques de dérivation	29
3.4.3	Monotonie, extremums et convexité	30
3.5	Plan d'étude d'une fonction réelle	33
3.6	Fonctions et suites	34
3.6.1	Caractérisation séquentielle de la continuité	34
3.6.2	Les Suites Récurrentes	34
4	Fonctions usuelles	36
4.1	Logarithme népérien	36
4.2	Exponentielle népérien	37
4.3	Fonctions puissances	38
4.4	Les fonctions circulaires réciproques	40
4.4.1	La fonction arcsin	40
4.4.2	La fonction arccos	41
4.4.3	La fonction arctan	42

Chapitre 1

Les nombres réels

1.1 Rappel des règles de calcul

Pour bien manipuler les nombres réels, il faut avant tout connaître quelques règles de base. Ces règles portent toutes un nom afin de les identifier tout de suite et ainsi savoir de quoi l'on parle.

Proposition 1.1 (Propriétés algébriques de $\mathbb{R}$)

Pour tous réels a, b et c . On notera l'addition $+$ et la multiplication $\times$ ou rien du tout ($a \times b$ ou ab quand il n'y a pas d'ambiguïté). On a alors les règles de calcul suivantes :

1. **Commutativité** : $a + b = b + a$ et $a \times b = b \times a$.
2. **Associativité** : $(a + b) + c = a + (b + c)$ et $(a \times b) \times c = a \times (b \times c)$.
3. **Distributivité** : $a \times (b + c) = a \times b + a \times c$.
4. **Éléments neutres** : $a + 0 = a$ et $a \times 1 = a$.
5. **Opposé** : Il existe $-a$ tel que $a + (-a) = 0$.
6. **Inverse** : Si $a \neq 0$, a possède un inverse noté a^{-1} (ou $\frac{1}{a}$) tel que $a \times a^{-1} = 1$.

On rappelle également les règle de comparaison.

Proposition 1.2 (Propriétés de la relation $\leq$)

L'ensemble $\mathbb{R}$ muni de la relation $\leq$ est un ensemble totalement ordonné. C'est-à-dire, pour tous réels a, b et c :

1. **Réflexivité** : $a \leq a$.
2. **Antisymétrie** : Si $a \leq b$ et $b \leq a$, alors $a = b$.
3. **Transitivité** : Si $a \leq b$ et $b \leq c$, alors $a \leq c$.
4. **Totalité** : On a toujours $a \leq b$ ou $b \leq a$.

On note $\mathbb{R}_+$ l'ensemble des réels positifs ($0 \leq a$) et $\mathbb{R}_-$ l'ensemble des réels négatifs ($a \leq 0$). On note aussi $a < b$ pour signifier que $a \leq b$ et $a \neq b$. Ainsi, si $a < b$, alors $a \leq b$ (la réciproque est fausse).

Proposition 1.3 (Règles de compatibilité)

Soient a, b, c, d et λ des réels.

- **Addition** : Si $a \leq b$ et $c \leq d$, alors $a + c \leq b + d$.
- **Produit par $\lambda \geq 0$** : Si $a \leq b$, alors $\lambda a \leq \lambda b$.
- **Produit par $\lambda \leq 0$** : Si $a \leq b$, alors $\lambda a \geq \lambda b$ (le sens change).
- **Inversion** : Si $0 < a \leq b$ alors $0 < \frac{1}{b} \leq \frac{1}{a}$, et si $a \leq b < 0$, alors $\frac{1}{b} \leq \frac{1}{a} < 0$.

Majoration et minoration d'un quotient

Pour un quotient de termes positifs $\frac{a}{b}$:

- Pour **majorer** $\frac{a}{b}$, on majore le numérateur a et on minore le dénominateur b .
- Pour **minorer** $\frac{a}{b}$, on minore le numérateur a et on majore le dénominateur b .

1.2 Droite réelle achevée, intervalles et voisinages

Définition 1.1 (Droite réelle achevée)

On appelle **droite réelle achevée**, notée $\overline{\mathbb{R}}$, l'ensemble $\mathbb{R}$ auquel on adjoint deux éléments terminaux notés $-\infty$ et $+\infty$: $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$.

L'ordre usuel de $\mathbb{R}$ est prolongé à $\overline{\mathbb{R}}$ en posant : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad -\infty < x < +\infty$.

Définition 1.2

On appelle **intervalle** de $\mathbb{R}$ toute partie I de $\mathbb{R}$ vérifiant l'implication suivante :

$$\forall (x, y) \in I^2, \quad \forall z \in \mathbb{R}, \quad (x \leq z \leq y) \Rightarrow z \in I$$

Il existe plusieurs types d'intervalles de $\mathbb{R}$, classés selon l'appartenance de leurs bornes.

- **L'intervalle fermé** $[a, b]$, auquel les bornes a et b appartiennent :

$$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$$

- **L'intervalle ouvert** $]a, b[$, auquel les bornes a et b n'appartiennent pas :

$$]a, b[= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$$

- **Les intervalles semi-ouverts** à gauche $]a, b]$ ou à droite $[a, b[$:

$$]a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\} \quad \text{et} \quad [a, b[= \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$$

Lorsque l'une des bornes est infinie ($-\infty$ à gauche ou $+\infty$ à droite), on définit de la même manière les intervalles non bornés :

$$\begin{aligned} [a, +\infty[&= \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x\}, &]a, +\infty[&= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x\}, \\]-\infty, a] &= \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq a\}, &]-\infty, a[&= \{x \in \mathbb{R} \mid x < a\}. \end{aligned}$$

Enfin, l'ensemble $\mathbb{R}$ lui-même est un intervalle dont les deux bornes sont infinies : $\mathbb{R} =]-\infty, +\infty[$.

Définition 1.3 (Voisinages)

Soit V une partie non vide de $\mathbb{R}$. On dit que :

1. V est un **voisinage de** $a \in \mathbb{R}$ s'il existe un intervalle ouvert I tel que $a \in I$ et $I \subset V$.
2. V est un **voisinage de** $+\infty$ s'il contient un intervalle du type $]b, +\infty[$ avec $b \in \mathbb{R}$.
3. V est un **voisinage de** $-\infty$ s'il contient un intervalle du type $] - \infty, b[$ avec $b \in \mathbb{R}$.

1.3 Borne supérieure, borne inférieure

Définition 1.4

Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$.

1. On dit que A est majorée s'il existe un réel M tel que, pour tout $x \in A$, $x \leq M$. Un tel réel M est appelé un majorant de A . On dit aussi que A est majorée par M .
2. On dit que A est minorée s'il existe un réel m tel que, pour tout $x \in A$, $m \leq x$. Un tel réel m est appelé un minorant de A . On dit aussi que A est minorée par m .
3. On dit que A est bornée si elle est à la fois majorée et minorée.

Théorème 1.1 (Définition)

1. Pour toute partie non vide et majorée A de $\mathbb{R}$, il existe un unique réel qui est le plus petit des majorants de A . Ce réel s'appelle la borne supérieure de A et on le note $\sup(A)$.
2. Pour toute partie non vide et minorée A de $\mathbb{R}$, il existe un unique réel qui est le plus grand des minorants de A . Ce réel s'appelle la borne inférieure de A et on le note $\inf(A)$.

Par convention,

- si A est une partie non vide non majorée, on pose $\sup(A) = +\infty$,
- si A est une partie non vide non minorée, on pose $\inf(A) = -\infty$.

Exemple 1.1

1. L'ensemble $\mathbb{N}$ n'est pas majoré, il admet $+\infty$ pour borne supérieure.
2. Les ensembles $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R}$ ne sont ni majorés ni minorés, ils admettent $-\infty$ et $+\infty$ pour borne inférieure et borne supérieure.

Proposition 1.4 (Caractérisation des bornes)

Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$, α et β deux réels. Alors

$$\begin{aligned} \alpha = \sup(A) &\iff \begin{cases} \forall x \in A, & x \leq \alpha \\ \forall \varepsilon > 0, \exists x_\varepsilon \in A, & \alpha - \varepsilon < x_\varepsilon. \end{cases} \\ \beta = \inf(A) &\iff \begin{cases} \forall x \in A, & \beta \leq x \\ \forall \varepsilon > 0, \exists x_\varepsilon \in A, & x_\varepsilon < \beta + \varepsilon. \end{cases} \end{aligned}$$

Définition 1.5

Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$.

1. On dit que A admet un plus grand élément α lorsque α est à la fois un majorant de A et un élément de A . S'il existe, α s'appelle aussi le maximum de A et se note $\max(A)$.
2. On dit que A admet un plus petit élément β lorsque β est à la fois un minorant de A et un élément de A . S'il existe, β s'appelle aussi le minimum de A et se note $\min(A)$.

Exemple 1.2

Soit a et b deux réels tels que $a < b$.

- Les intervalles $[a; b]$, $[a; b[$, $]a; b]$ et $]a; b[$ sont bornés et admettent tous a pour borne inférieure et b pour borne supérieure.
- L'intervalle $[a; b]$ admet a pour plus petit élément et b pour plus grand élément, alors que l'intervalle $]a; b[$ n'admet ni plus petit ni plus grand élément.
- Les intervalles $[a, +\infty[$ et $]a, +\infty[$ sont minorés mais pas majorés, ils admettent a pour borne inférieure et $+\infty$ pour borne supérieure.

Exemple 1.3

Soit $A = \{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}^*\}$. Déterminer, s'ils existent, les majorants, les minorants, la borne supérieure, la borne inférieure, le plus grand élément et le plus petit élément de A .

Théorème 1.2 (Deux propriétés de $\mathbb{N}$)

1. Toute partie non vide de $\mathbb{N}$ possède un plus petit élément.
2. Toute partie non vide majorée de $\mathbb{N}$ possède un plus grand élément.

1.4 Outils de calculs sur les réels**1.4.1 La partie entière d'un réel****Proposition 1.5 (Définition)**

Pour tout réel x , il existe un unique entier relatif n tel que $n \leq x < n + 1$. On l'appelle partie entière de x , notée $\mathbb{E}(x)$ ou $\lfloor x \rfloor$.

Autrement dit, la partie entière de x est le plus grand entier inférieur ou égal à x .

Exemple 1.4

- **Pour les réels positifs :** $\mathbb{E}(3,14) = 3$ et $\mathbb{E}(0,75) = 0$.
- **Pour les réels négatifs :** $\mathbb{E}(-2,3) = -3$ (et non -2 , car $-3 \leq -2, 3 < -2$).
- **Pour les entiers :** $\mathbb{E}(5) = 5$ et $\mathbb{E}(-4) = -4$.

Proposition 1.6 (Propriétés fondamentales)

Pour tous réels x et y , et pour tout entier $m \in \mathbb{Z}$:

1. $\mathbb{E}(x) \leq x < \mathbb{E}(x) + 1$
2. $x - 1 < \mathbb{E}(x) \leq x$
3. $\mathbb{E}(x + m) = \mathbb{E}(x) + m$
4. $\mathbb{E}(x) = x \iff x \in \mathbb{Z}$.

1.4.2 Valeur absolue

Définition 1.6

Pour tout réel x , la valeur absolue de x est le nombre réel positif $|x|$ défini par

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

Sur la droite représentant les nombres réels, $|x|$ est la distance entre le point d'abscisse x et l'origine.

Exemple 1.5

Soit $x \in \mathbb{R}$. Déterminer une expression de $|x - 3| - |x + 2|$ en fonction de x sans symbole de valeur absolue.

Proposition 1.7

La valeur absolue vérifie les propriétés suivantes.

1. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|x| = 0 \iff x = 0$. En outre, $-|x| \leq x \leq |x|$.
2. Pour tous réels x et y , $|xy| = |x| \times |y|$ et $\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}$ si $y \neq 0$.
3. Pour tous réels x et y , on a : $|x + y| \leq |x| + |y|$ et $||x| - |y|| \leq |x - y|$.

Complément

Soit a un réel et ε un réel strictement positif. Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

- $|x - a| \leq \varepsilon \iff -\varepsilon \leq x - a \leq \varepsilon \iff a - \varepsilon \leq x \leq a + \varepsilon \iff x \in [a - \varepsilon, a + \varepsilon]$
- $|x - a| < \varepsilon \iff -\varepsilon < x - a < \varepsilon \iff a - \varepsilon < x < a + \varepsilon \iff x \in]a - \varepsilon, a + \varepsilon[$.

Exemple 1.6

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

$$1. |x - 2| < \frac{3}{x} \quad 2. |x^2 - 1| \leq 1.$$

1.4.3 Puissances et racines n-ièmes

Pour tout réel non nul x et tout entier naturel n , on rappelle que $x^n = x \times x^{n-1}$ avec $x^0 = 1$ et $x^{-n} = \frac{1}{x^n}$. Les règles de calcul usuelles sur ces puissances entières sont supposées connues. L'identité remarquable $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$ se généralise comme suit.

Proposition 1.8 (Factorisation de $a^n - b^n$)

Soit a et b deux réels. Pour tout entier naturel non nul n ,

$$a^n - b^n = (a - b) (a^{n-1} + a^{n-2}b + \dots + ab^{n-2} + b^{n-1}) = (a - b) \left(\sum_{k=0}^{n-1} a^{n-1-k} b^k \right).$$

Cette formule montre immédiatement que pour tous réels tels que $0 \leq a < b$, on a $a^n < b^n$.

Proposition 1.9 (Définition)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et x un nombre réel.

- **Si n est impair :** L'équation $y^n = x$ d'inconnue $y \in \mathbb{R}$ admet une unique solution réelle. On l'appelle **racine n -ième** de x , notée $y = \sqrt[n]{x}$.
- **Si n est pair :**
 - Si $x > 0$, l'équation $y^n = x$ admet deux solutions réelles opposées. On note $\sqrt[n]{x}$ l'unique solution **positive**.
 - Si $x = 0$, l'unique solution de l'équation $y^n = 0$ est 0. On pose $\sqrt[n]{0} = 0$.
 - Si $x < 0$, l'équation $y^n = x$ n'admet aucune solution réelle.

Par convention, pour $n = 2$, on note simplement $\sqrt{x}$ au lieu de $\sqrt[2]{x}$.

Exemple 1.7

- $\sqrt[3]{-8} = -2$ car $(-2)^3 = -8$. La racine cubique d'un nombre négatif est bien définie.
- $\sqrt[4]{81} = 3$ car $3^4 = 81$. En revanche, $\sqrt[4]{-16}$ n'existe pas dans $\mathbb{R}$.

Proposition 1.10 (Propriétés fondamentales)

Pour tous réels a et b positifs ou nuls (et pour tous réels a et b si n et m sont impairs), on dispose des règles de calcul suivantes :

$$\begin{array}{ll} 1. \sqrt[n]{a} \times \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab} & 2. \sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} \quad (b > 0) \\ 3. \sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[nm]{a} & 4. (\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m} \end{array}$$

Exemple 1.8 (Exemple de simplification)

Soit $A = \frac{\sqrt[3]{24}}{\sqrt[3]{3}} \times \sqrt{\sqrt[3]{64}}$. On a : $A = \sqrt[3]{\frac{24}{3}} \times \sqrt[6]{64} = \sqrt[3]{8} \times \sqrt[6]{2^6} = 2 \times 2 = 4$.

Remarque. Attention aux simplifications directes lorsque n est pair ! Pour tout réel x ,

$$\sqrt[n]{x^n} = |x| \quad (\text{si } n \text{ est pair}) \quad \text{alors que} \quad \sqrt[n]{x^n} = x \quad (\text{si } n \text{ est impair}).$$

Exemple 1.9

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation et l'inéquation suivantes :

$$1. \sqrt{x^2 - 1} = x + 1. \quad 2. x + 1 \leq \sqrt{x^2 + 1}.$$

A présent, on peut étendre l'usage des exposants en dehors du cadre des entiers naturels.

Définition 1.7 (Puissances à exposants rationnels)

Soit $x > 0$ et $r = \frac{p}{q}$ un nombre rationnel, où $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N}^*$. On définit la puissance r -ième de x par :

$$x^r = x^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{x^p} = (\sqrt[q]{x})^p.$$

Si $x = 0$, on pose $0^r = 0$ pour tout rationnel $r > 0$.

Remarque sur la cohérence. Cette définition est indépendante de la fraction choisie. En effet, si $\frac{p}{q} = \frac{m}{n}$ (soit $np = mq$), alors $(\sqrt[q]{x^p})^{nq} = x^{np} = x^{mq} = (\sqrt[n]{x^m})^{nq}$. L'unicité de la racine positive garantit que $\sqrt[q]{x^p} = \sqrt[n]{x^m}$.

Exemple 1.10

$$\bullet 4^{\frac{3}{2}} = (\sqrt{4})^3 = 2^3 = 8, \quad \bullet 27^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{\sqrt[3]{27^2}} = \frac{1}{3^2} = \frac{1}{9}.$$

Proposition 1.11 (Règles de calculs)

Pour tous réels $x > 0$, $y > 0$ et tous rationnels a et b :

$$\begin{array}{lll} 1. x^a \times x^b = x^{a+b} & 2. (x^a)^b = x^{ab} & 3. (xy)^a = x^a y^a \\ 4. \frac{x^a}{x^b} = x^{a-b} & 5. x^{-a} = \frac{1}{x^a} & 6. \left(\frac{x}{y}\right)^a = \frac{x^a}{y^a}. \end{array}$$

Exemple 1.11

Simplifier l'expression $A = \frac{\sqrt{x} \times \sqrt[3]{x^2}}{\sqrt[6]{x}}$ pour $x > 0$.

Proposition 1.12 (Monotonie sur $\mathbb{Q}$)

Soit x un réel strictement positif et r, s deux rationnels.

1. Si $x > 1$, alors $r < s \implies x^r < x^s$.
2. Si $0 < x < 1$, alors $r < s \implies x^r > x^s$.

Chapitre 2

Suites réelles

2.1 Définitions générales et vocabulaire

Définition 2.1

Une suite réelle est un procédé u qui à tout entier naturel n associe au plus un nombre réel $u(n)$. Plutôt que de noter $u(n)$, on note u_n le terme général de la suite. La suite elle-même est notée $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ou simplement (u_n) .

Il existe deux manières principales de définir une suite :

- **De façon explicite** : Chaque terme s'exprime directement en fonction de n . Par exemple, $u_n = f(n) = \frac{n}{n+1}$.
- **Par récurrence** : Chaque terme se calcule à partir du (ou des) terme(s) précédent(s). Il faut impérativement fixer un premier terme. Par exemple, $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = 3u_n - 1$.

Remarque. Il arrive qu'une suite ne soit définie qu'à partir d'un certain entier n_0 . On la note alors $(u_n)_{n \geq n_0}$. Par ailleurs, dire qu'une suite (u_n) possède une propriété P à partir d'un certain rang, signifie qu'il existe un entier $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \geq n_0$, le terme u_n vérifie cette propriété.

Définition 2.2 (Propriétés générales des suites)

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle. On dit que la suite (u_n) est :

- **majorée** s'il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq M$;
- **minorée** s'il existe $m \in \mathbb{R}$ tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $m \leq u_n$;
- **bornée** si elle est à la fois majorée et minorée ;
- **croissante** si, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq u_{n+1}$;
- **décroissante** si, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} \leq u_n$;
- **monotone** si elle est soit croissante, soit décroissante.

Fiche méthode 1

Pour étudier la monotonie, on étudie généralement le signe de la différence $u_{n+1} - u_n$. Si les termes sont strictement positifs, on peut aussi comparer le rapport $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ à 1.

Exemple 2.1

Étudier la monotonie de la suite (u_n) dans les cas suivants :

$$1. u_n = \frac{2n+1}{n+1}, \quad 2. u_n = \frac{2^n}{n!}, \quad n \geq 1.$$

2.2 Limites de suites et convergence

L'objectif de l'analyse des suites est de déterminer leur comportement lorsque n tend vers $+\infty$.

Définition 2.3

1. On dit qu'une suite (u_n) admet $\ell \in \mathbb{R}$ pour limite si :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad : \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad n \geq n_0 \implies |u_n - \ell| < \varepsilon.$$

2. On dit qu'une suite (u_n) admet $+\infty$ pour limite si :

$$\forall M > 0, \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad : \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad n \geq n_0 \implies M < u_n.$$

3. On dit qu'une suite (u_n) admet $-\infty$ pour limite si :

$$\forall M > 0, \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad : \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad n \geq n_0 \implies u_n < -M.$$

Une suite est dite **convergente** lorsqu'elle admet une limite finie et elle est dite **divergente** si elle n'est pas convergente.

Remarque. La divergence regroupe deux cas de figure distincts : La suite a pour limite $+\infty$ ou $-\infty$ ou la suite n'admet aucune limite. Étudier la nature d'une suite c'est déterminer si elle est convergente ou divergente.

Proposition 2.1

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle. Si (u_n) admet une limite, celle-ci est unique et notée $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

Complément : Fiche méthode

Pour répondre à la question : « Utiliser la définition pour montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell$ », la stratégie est la suivante :

1. **Exprimer l'écart** : On fixe un réel $\varepsilon > 0$, on part de l'expression $|u_n - \ell|$ que l'on simplifie ou majore pour faire apparaître un bloc simple dépendant de n .
2. **Chercher le rang seuil** : On cherche à partir de quel rang n ce bloc simplifié devient strictement inférieur à ε . On isole n pour trouver une condition de la forme $n > \varphi(\varepsilon)$.
3. **Conclure** : On choisit pour n_0 un entier naturel supérieur ou égal à $\varphi(\varepsilon)$ (par exemple $n_0 = \mathbb{E}[\varphi(\varepsilon)] + 1$). On précise enfin que pour tout $n \geq n_0$, on a bien $|u_n - \ell| < \varepsilon$.

Note : Cette stratégie reste identique si la limite de la suite est infinie ($+\infty$ ou $-\infty$).

- Pour $\lim u_n = +\infty$: on part de $u_n > M$ et on cherche n_0 tel que si $n \geq n_0$, alors $u_n > M$.
- Pour $\lim u_n = -\infty$: on peut considérer $v_n = -u_n$ et montrer que $\lim v_n = +\infty$.

Exemple 2.2

Soit $u_n = \frac{2n^2 + 1}{n^2 + 3}$. Utiliser la définition pour montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 2$.

Proposition 2.2

Toute suite convergente est bornée.

Remarque. Une suite bornée n'est pas nécessairement convergente. Par exemple, la suite (u_n) de terme général $u_n = (-1)^n$ est bornée car $|u_n| = 1$ mais elle diverge. En effet, si l'on suppose que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell \in \mathbb{R}$, la définition avec $\varepsilon = \frac{1}{2}$ implique, qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \geq n_0$,

$$|(-1)^n - \ell| < \frac{1}{2} \implies \ell - \frac{1}{2} < (-1)^n < \ell + \frac{1}{2}$$

En prenant $n = 2n_0$ et puis $n = 2n_0 + 1$, et puisque $(-1)^{2n_0} = 1$ et $(-1)^{2n_0+1} = -1$, on obtient :

$$1 < \ell + \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad \ell - \frac{1}{2} < -1$$

Ainsi, $\frac{1}{2} < \ell < -\frac{1}{2}$. Ceci est absurde donc la suite de terme général $(-1)^n$ n'a pas de limite.

2.3 Opérations sur les limites

Définition 2.4 (Opérations algébriques prolongées)

On prolonge partiellement l'addition, la multiplication et l'inverse de $\mathbb{R}$ à $\overline{\mathbb{R}}$:

- **Addition :** Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x + (+\infty) = +\infty$, $x + (-\infty) = -\infty$, ainsi que $(+\infty) + (+\infty) = +\infty$ et $(-\infty) + (-\infty) = -\infty$.
- **Multiplication :** Si $x > 0$, $x \times (+\infty) = +\infty$ et $x \times (-\infty) = -\infty$ (on inverse les signes si $x < 0$). De plus, $(\pm\infty) \times (\pm\infty) = \pm\infty$ (règle des signes).
- **Quotient et inverse :** $\frac{1}{+\infty} = 0$, $\frac{1}{-\infty} = 0$ et $\frac{1}{0^+} = +\infty$, $\frac{1}{0^-} = -\infty$, où l'on note $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0^+$ (resp. $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0^-$) si $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$ et $0 \leq u_n$ (resp. $u_n \leq 0$) à partir d'un certain rang.

L'extension des opérations usuelles à $\overline{\mathbb{R}}$ systématise le calcul des limites, à l'exception de quatre opérations indéfinies nommées **formes indéterminées (F.I.)** :

$$(+\infty) + (-\infty), \quad 0 \times (\pm\infty), \quad \frac{\pm\infty}{\pm\infty} \quad \text{et} \quad \frac{0}{0}.$$

Proposition 2.3 (Opérations sur les limites)

Soient (u_n) et (v_n) deux suites réelles admettant des limites finies ou infinies. **Si l'opération correspondante dans $\overline{\mathbb{R}}$ n'est pas une forme indéterminée**, alors :

1. $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n + v_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n + \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$;
2. $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n v_n) = \left(\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n \right) \times \left(\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n \right)$;
3. Si de plus (v_n) ne s'annule pas à partir d'un certain rang : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{v_n} = \frac{\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n}{\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n}$.

Remarque importante. Les formes indéterminées pour lesquelles ces égalités ne s'appliquent pas nécessitent, une étude spécifique pour lever l'indétermination.

Exemple 2.3 (Limites à connaître)

Soit a un nombre réel et r un nombre rationnel.

1. Si $r > 0$ alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^r = +\infty$
2. Si $a > 0$ alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} a^{1/n} = 1$
3. Si $a > 1$ alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} a^n = +\infty$
4. Si $-1 < a < 1$ alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} a^n = 0$.

Exemple 2.4 (Exemples de levée d'indétermination)

Calculer la limite, lorsqu'elle existe, de la suite (u_n) dans les cas suivants :

1. $u_n = n^2 - n$.
2. $u_n = \frac{n^2 + 1}{n + 1} - n$.
3. $u_n = \sqrt{n + 2} - \sqrt{n}$.

Exemple 2.5 (Divergence des suites $(\cos(n))$ et $(\sin(n))$)

On considère les suites réelles $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définies par $u_n = \cos(n)$ et $v_n = \sin(n)$.

1. Montrer que si (u_n) ou (v_n) admet une limite, celle-ci est finie.
2. On suppose que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \cos(n) = \ell \in \mathbb{R}$.
 - (a) Justifier que les suites $(\cos(n + 1))$ et $(\cos(n - 1))$ convergent. Quelles sont leurs limites respectives ?
 - (b) Établir les relations suivantes, valables pour tout entier naturel $n \geq 1$:

$$(2.1) \quad \cos(n + 1) + \cos(n - 1) = 2 \cos(n) \cos(1)$$

$$(2.2) \quad \cos(n + 1) - \cos(n - 1) = -2 \sin(n) \sin(1)$$
 - (c) Montrer que $\ell = 0$ et en déduire que la suite $(\sin(n))$ est convergente. Quelle est sa limite ?
 - (d) À l'aide de la relation liant $\cos^2(n)$ et $\sin^2(n)$, mettre en évidence une contradiction et conclure quant à la nature de la suite $(\cos(n))$.
3. En utilisant une démarche analogue, démontrer que la suite $(\sin(n))$ n'admet elle aussi aucune limite (ni finie, ni infinie).

2.4 Théorèmes fondamentaux de convergence

2.4.1 Théorème d'encadrement

Le résultat suivant ne permet pas de prouver l'existence d'une limite ou de la calculer. Il s'agit d'une **propriété fondamentale** qui décrit comment l'ordre est préservé lorsqu'on passe à la limite.

Théorème 2.1 (Passage à la limite dans les inégalités)

Soient (u_n) et (v_n) deux suites réelles convergentes. Si $u_n \leq v_n$ à partir d'un certain rang, alors :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n \leq \lim_{n \rightarrow \infty} v_n$$

Les deux théorèmes suivants sont de puissants outils de calcul. Ils permettent de calculer la limite d'une suite, en l'encadrant (des deux côtés) ou en la minorant/majorant (d'un seul côté).

Théorème 2.2 (Théorème d'encadrement (ou des Gendarmes))

Soient (a_n) , (u_n) et (b_n) trois suites réelles telles que $a_n \leq u_n \leq b_n$ à partir d'un certain rang. Si (a_n) et (b_n) convergent vers la même limite ℓ , alors la suite (u_n) est convergente et converge également vers ℓ .

Remarque importante. Ce théorème exige impérativement que la limite commune ℓ soit finie. Si les suites extérieures tendent vers $\pm\infty$, on utilise alors les théorèmes de comparaison.

Théorème 2.3 (Théorème de comparaison)

Soient (u_n) et (v_n) deux suites réelles telles que $u_n \leq v_n$ à partir d'un certain rang.

1. Si $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = +\infty$, alors $\lim_{n \rightarrow \infty} v_n = +\infty$.
2. Si $\lim_{n \rightarrow \infty} v_n = -\infty$, alors $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = -\infty$.

Exemple 2.6

Calculer les limites des suites définies par : $u_n = \frac{\sin(n)}{n}$ et $v_n = \frac{n}{1 + \sin^2(n)}$.

2.4.2 Théorème des suites extraites**Définition 2.5**

Une suite extraite (ou sous-suite) de (u_n) est une suite de la forme $(u_{\varphi(n)})$, où $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ est une application strictement croissante.

Proposition 2.4

Si une suite (u_n) converge vers ℓ , alors toute suite extraite $(u_{\varphi(n)})$ converge vers ℓ .

Remarque (Outil pratique). Par contraposition, si une suite possède une sous-suite divergente, ou deux sous-suites convergeant vers des limites distinctes, alors elle diverge.

Exemple 2.7

Justifier que les suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de termes généraux respectifs $u_n = (-1)^n$ et $v_n = \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)$ sont divergentes.

Théorème 2.4 (Théorème des suites extraites)

Une suite (u_n) converge vers ℓ si, et seulement si, les sous-suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) convergent toutes deux vers ℓ .

Exemple 2.8

Étudier la nature de la suite réelle (u_n) définie par $u_n = \frac{2n + (-1)^n}{n - (-1)^n}$.

2.4.3 Suites monotones et suites adjacentes**Théorème 2.5 (de la limite monotone)**

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle croissante.

1. Si la suite (u_n) est majorée alors elle est convergente et $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \sup\{u_n \mid n \in \mathbb{N}\}$.
2. Si la suite (u_n) n'est pas majorée, elle diverge vers $+\infty$: $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$.

On en déduit le corollaire suivant relatif aux suites décroissantes

Corollaire 2.1

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle décroissante.

1. Si la suite (u_n) est minorée alors elle est convergente et $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \inf\{u_n \mid n \in \mathbb{N}\}$.
2. Si la suite (u_n) n'est pas minorée, elle diverge vers $-\infty$: $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$.

Exemple 2.9 (Application du théorème de la limite monotone)

On définit la suite réelle $(u_n)_{n \geq 1}$ en posant, pour tout entier naturel $n \geq 1$,

$$u_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2}.$$

1. Étudier le sens de variation de la suite (u_n) .
2. Montrer par récurrence que, pour tout $n \geq 1$, $u_n \leq 2 - \frac{1}{n}$.
3. En déduire que la suite (u_n) est majorée. Que dire de sa convergence ?

Définition 2.6 (Suites adjacentes)

Deux suites (u_n) et (v_n) sont dites adjacentes si l'une d'elles est croissante, l'autre est décroissante et si $\lim_{n \rightarrow \infty} (u_n - v_n) = 0$.

Théorème 2.6 (Théorème des suites adjacentes)

Si (u_n) et (v_n) sont deux suites adjacentes (avec (u_n) croissante), alors elles convergent vers une même limite ℓ . De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq \ell \leq v_n$.

Exemple 2.10

Démontrer que les deux suites réelles $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $(b_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définies par les sommes suivantes sont convergentes et qu'elles convergent vers une même limite :

$$a_n = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} \quad \text{et} \quad b_n = \sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{k}.$$

Exemple 2.11 (Approximation décimale d'un réel)

Soit $a \in \mathbb{R}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit les deux suites (a_n) et (b_n) par :

$$a_n = 10^{-n} \mathbb{E}(10^n a) \quad \text{et} \quad b_n = a_n + 10^{-n}$$

1. Vérifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a l'encadrement suivant : $a_n \leq a < b_n$.
2. En utilisant les propriétés de la partie entière, justifier également que :

$$10 \mathbb{E}(10^n a) \leq 10^{n+1} a < 10 [\mathbb{E}(10^n a) + 1]$$

3. Démontrer que la suite (a_n) est croissante et que la suite (b_n) est décroissante.
4. Montrer que les suites (a_n) et (b_n) sont adjacentes et déterminer leur limite commune.

La suite (a_n) représente l'approximation décimale par défaut de a à n décimales, tandis que (b_n) représente son approximation par excès. À titre d'exemple, avec $a = \sqrt{2} \simeq 1,41421356 \dots$, les premiers termes de ces suites sont :

$$\begin{array}{cccccc} a_0 = 1 & a_1 = 1,4 = \frac{14}{10} & a_2 = 1,41 = \frac{141}{100} & a_3 = 1,414 = \frac{1414}{1000} & a_4 = 1,4142 = \frac{14142}{10000} \\ b_0 = 2 & b_1 = 1,5 = \frac{15}{10} & b_2 = 1,42 = \frac{142}{100} & b_3 = 1,415 = \frac{1415}{1000} & b_4 = 1,4143 = \frac{14143}{10000} \end{array}$$

Application. Les nombres a_n et b_n étant rationnels, ce résultat prouve que tout nombre réel est la limite d'une suite de rationnels. On dit que $\mathbb{Q}$ est **dense** dans $\mathbb{R}$. Cette propriété permet de définir les **puissances à exposants réels**. Puisque, pour un réel $x > 0$, $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N}^*$, la puissance rationnelle $x^{p/q} = \sqrt[q]{x^p}$ est déjà connue, on peut poser la définition suivante.

Définition 2.7 (Puissances à exposants réels)

Soit x un réel strictement positif et a un réel quelconque. Soit (a_n) une suite de nombres rationnels convergeant vers a . On pose : $x^a = \lim_{n \rightarrow +\infty} x^{a_n}$.

Toutes les propriétés connues pour les exposants rationnels sont aussi valables pour les exposants réels.

Proposition 2.5 (Propriétés algébriques)

Soient $x, y \in]0, +\infty[$ et $a, b \in \mathbb{R}$. Alors,

- | | | |
|-----------------------------|--------------------------------|---|
| 1. $x^a x^b = x^{a+b}$ | 2. $(x^a)^b = x^{ab}$ | 3. $(xy)^a = x^a y^a$ |
| 4. $\frac{1}{x^a} = x^{-a}$ | 5. $\frac{x^a}{x^b} = x^{a-b}$ | 6. $\left(\frac{x}{y}\right)^a = \frac{x^a}{y^a}$ |

Chapitre 3

Fonctions réelles

3.1 Généralités sur les fonctions

3.1.1 Définitions et préliminaires

Définition 3.1 (Fonction réelle d'une variable réelle)

Une **fonction réelle d'une variable réelle** est une relation qui à tout nombre réel associe au plus un nombre réel. Pour une fonction f , définie sur une partie D de $\mathbb{R}$, on note :

$$\begin{aligned} f &: D \rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto f(x) \end{aligned}$$

- x est la **variable** réelle et $f(x)$ est l'**image** de x par f .
- Si $y = f(x)$, on dit que x est un **antécédent** de y par f .
- Le **domaine de définition** de f est l'ensemble des réels x pour lesquels $f(x)$ est définie. On le note souvent $D_f : D_f = \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) \in \mathbb{R}\}$.

Représentation graphique ou graphe. Ce type de fonction se représente graphiquement dans un plan cartésien par une courbe, où chaque point a pour coordonnées $(x, f(x))$.

Exemple 3.1

1. La fonction **identité** de $A \subseteq \mathbb{R}$ est la fonction $\text{Id}_A : A \rightarrow A$ définie par $\text{Id}_A(x) = x$.
2. Le domaine de définition de la fonction f définie par $f(x) = \frac{1}{x}$, est $D_f = \mathbb{R}^*$.
3. Le domaine de définition de la fonction f définie par $f(x) = \sqrt{x}$, est $D_f = [0, +\infty[$.

Les opérations sur les réels permettent de définir des opérations analogues sur les fonctions réelles.

Définition 3.2 (Opérations algébriques sur les fonctions)

Soit λ un réel non nul et soient f et g deux fonctions définies respectivement sur D_f et D_g . Les fonctions $f + g$, λf , $f \times g$ et $\frac{f}{g}$ sont définies de la manière suivante :

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x) \quad \text{sur le domaine} \quad D = D_f \cap D_g$$

$$(\lambda f)(x) = \lambda[f(x)] \quad \text{sur le domaine} \quad D = D_f$$

$$(f \times g)(x) = f(x).g(x) \quad \text{sur le domaine} \quad D = D_f \cap D_g$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} \quad \text{sur le domaine} \quad D = \{x \in D_f \cap D_g : g(x) \neq 0\}.$$

Définition 3.3 (Composée de fonctions)

Soit f et g deux fonctions définies respectivement sur D_f et D_g . Le domaine de définition de la composée $f \circ g$ est $D = \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\}$ et cette fonction est définie par

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)).$$

Exercice 3.1

Soient f et g les fonctions réelles définies par $f(x) = x^2$ et $g(x) = \sqrt{x}$.

1. Préciser les domaines de définition des fonctions f et g .
2. Déterminer le domaine de définition et l'expression de la fonction $f \circ g$.
3. Déterminer le domaine de définition et l'expression de la fonction $g \circ f$.

3.1.2 Propriétés des fonctions réelles**Définition 3.4 (Fonction majorée, minorée, bornée)**

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.

1. On dit que f est **majorée** sur I s'il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que, pour tout $x \in I$, $f(x) \leq M$.
2. On dit que f est **minorée** sur I s'il existe $m \in \mathbb{R}$ tel que, pour tout $x \in I$, $m \leq f(x)$.
3. On dit que f est **bornée** sur I si elle est à la fois majorée et minorée.

Remarque.

1. La fonction $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ est majorée (resp. minorée ou bornée) sur I si et seulement si son image $\text{Im}(f) = f(I)$ l'est également dans $\mathbb{R}$.
2. On note $\sup_I f = \sup_{x \in I} f(x) = \sup(f(I))$ et $\inf_I f = \inf_{x \in I} f(x) = \inf(f(I))$.

Exemple 3.2 (Les fonctions circulaires)

Soit $x \in \mathbb{R}$ et $M(x)$ son image sur le cercle trigonométrique $\mathcal{C}$. Puisque $\cos(x)$ et $\sin(x)$ sont les coordonnées cartésiennes du point $M(x)$ dans un repère orthonormé et que $M(x) \in \mathcal{C}$, on a :

$$-1 \leq \cos(x) \leq 1 \quad \text{et} \quad -1 \leq \sin(x) \leq 1.$$

Autrement dit, les fonctions $\cos$ et $\sin$ sont bornées sur $\mathbb{R}$.

Définition 3.5 (Parité et périodicité)

Soit f une fonction réelle définie sur un domaine D de $\mathbb{R}$.

1. On dit que f est **paire** sur D si, pour tout $x \in D$, $-x \in D$ et $f(-x) = f(x)$.
2. On dit que f est **impaire** sur D si, pour tout $x \in D$, $-x \in D$ et $f(-x) = -f(x)$.
3. On dit que f est **périodique** sur D s'il existe un réel $T > 0$ tel que, pour tout $x \in D$, $(x + T) \in D$ et $f(x + T) = f(x)$. Le réel T est alors appelé une période de f .

Remarque. Dans un repère orthonormé :

1. Le graphe d'une fonction paire est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.
2. Le graphe d'une fonction impaire est symétrique par rapport à l'origine du repère.
3. Pour tracer le graphe d'une fonction T -périodique, il suffit de la représenter sur un intervalle de longueur T , puis de compléter la courbe par des translations de vecteurs $kT\vec{i}$ (où $k \in \mathbb{Z}$).

Exemple 3.3

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. La fonction $f_n : x \mapsto x^n$ définie sur $\mathbb{R}$ est paire si n est pair, et impaire si n est impair.
2. La fonction cos est paire sur $\mathbb{R}$ et la fonction sin est impaire sur $\mathbb{R}$.
3. Les fonctions cosinus et sinus sont 2π -périodiques sur $\mathbb{R}$.

Exercice 3.2 (La fonction tangente)]

La fonction tangente, notée $\tan$, est définie par $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$.

1. Déterminer le domaine de définition $D_{\tan}$ de la fonction $\tan$.
2. Montrer que la fonction $\tan$ est impaire sur $D_{\tan}$.
3. Montrer que la fonction $\tan$ est π -périodique sur $D_{\tan}$.

Définition 3.6 (Sens de variation)

Soit f une fonction réelle définie sur un domaine D et I un intervalle inclus dans D .

1. On dit que f est **croissante** sur I si, pour tout $(x_1, x_2) \in I \times I$:

$$x_1 < x_2 \implies f(x_1) \leq f(x_2)$$

2. On dit que f est **décroissante** sur I si, pour tout $(x_1, x_2) \in I \times I$:

$$x_1 < x_2 \implies f(x_1) \geq f(x_2)$$

Si l'on remplace les inégalités larges par des inégalités strictes dans ces définitions, la fonction est dite **strictement croissante** sur I ou **strictement décroissante** sur I .

Remarque.

1. Soit $(x_1, x_2) \in I \times I$ avec $x_1 \neq x_2$. Le **taux d'accroissement** de f entre x_1 et x_2 est la quantité :

$$T_f(x_1, x_2) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}.$$

La fonction f est croissante (resp. décroissante) sur I si et seulement si $T_f(x_1, x_2) \geq 0$ (resp. $T_f(x_1, x_2) \leq 0$) pour tout couple d'éléments distincts de I .

2. Une fonction est dite **monotone** (resp. strictement monotone) sur I si elle est croissante ou bien décroissante (resp. strictement croissante ou bien strictement décroissante) sur cet intervalle.

Définition 3.7 (Extremums globaux)

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et $a \in I$.

1. On dit que f admet un **maximum global** en a si, pour tout $x \in I$, $f(x) \leq f(a)$. Le réel $f(a)$ est alors le maximum de f sur I .
2. On dit que f admet un **minimum global** en a si, pour tout $x \in I$, $f(a) \leq f(x)$. Le réel $f(a)$ est alors le minimum de f sur I .

Un extremum global désigne indifféremment un maximum ou un minimum global.

Exemple 3.4

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 - 4x + 5$. La fonction f admet un minimum global en 2 égal à $f(2) = 1$. En effet, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on peut écrire sa forme canonique :

$$f(x) = (x - 2)^2 + 1 \geq 1 = f(2).$$

Définition 3.8 (Extremums locaux)

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et $a \in I$.

1. On dit que f admet un **maximum local** en a s'il existe un intervalle ouvert J contenant a tel que, pour tout $x \in J \cap I$, $f(x) \leq f(a)$.
2. On dit que f admet un **minimum local** en a s'il existe un intervalle ouvert J contenant a tel que, pour tout $x \in J \cap I$, $f(a) \leq f(x)$.

Un extremum local désigne indifféremment un maximum ou un minimum local.

3.2 Limites des fonctions réelles

3.2.1 Définitions et généralités

Définition 3.9 (Limites en un point fini)

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, $a \in I$ et f une fonction définie sur $I \setminus \{a\}$.

1. On dit que f a pour limite $\ell \in \mathbb{R}$ en a et on note $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell$, si :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \delta > 0 \quad : \quad \forall x \in I, \quad 0 < |x - a| < \delta \implies |f(x) - \ell| < \varepsilon.$$

2. On dit que f a pour limite $+\infty$ en a et on note $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$, si :

$$\forall M > 0, \quad \exists \delta > 0 \quad : \quad \forall x \in I, \quad 0 < |x - a| < \delta \implies M < f(x).$$

3. On dit que f a pour limite $-\infty$ en a et on note $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$, si :

$$\forall M > 0, \quad \exists \delta > 0 \quad : \quad \forall x \in I, \quad 0 < |x - a| < \delta \implies f(x) < -M.$$

Complément : Fiche méthode

Pour répondre à une question du type « Utiliser la définition pour montrer que $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell \gg$, la méthode est toujours la même :

1. On part de l'expression que l'on veut majorer $|f(x) - \ell|$ et on fait apparaître le bloc $|x - a|$,
2. On impose une première condition $|x - a| < \delta \leq 1$ et on borne le reste,
3. On exprime le δ final en fonction de ε et on vérifie que ce choix répond à la question.

Note : Cette stratégie algébrique de majoration ou de minoration reste identique si la limite en a est infinie ($+\infty$ ou $-\infty$). La seule différence est qu'au lieu de chercher un écart δ lié à ε , on cherchera à contrôler la fonction par un seuil ($M < f(x)$ ou $f(x) < -M$).

Exemple 3.5

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 - x + 1$. Utiliser la définition pour montrer que $\lim_{x \rightarrow 2} (x^2 - x + 1) = 3$.

Exemple 3.6

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{2\}$ par $f(x) = \frac{1}{(x-2)^2}$. Utiliser la définition pour montrer que $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{(x-2)^2} = +\infty$.

Remarque. On peut parfois restreindre l'étude de la limite d'une fonction à un seul côté d'un point, ce qui conduit aux notions de *limite à droite* et de *limite à gauche*. De la même manière, on peut préciser si la limite ℓ est approchée par valeurs supérieures (notée ℓ^+) ou inférieures (notée ℓ^-).

Définition 3.10 (Limites à gauche et à droite)

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, $a \in I$ et f une fonction définie sur $I \setminus \{a\}$.

1. On dit que f a pour limite $\ell \in \mathbb{R}$ à droite en a , et on note $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \ell$, si :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \delta > 0 \quad : \quad \forall x \in I, \quad a < x < a + \delta \implies |f(x) - \ell| < \varepsilon.$$

2. On dit que f a pour limite $\ell \in \mathbb{R}$ à gauche en a , et on note $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \ell$, si :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \delta > 0 \quad : \quad \forall x \in I, \quad a - \delta < x < a \implies |f(x) - \ell| < \varepsilon.$$

Proposition 3.1

Une fonction f admet une limite en $a \in \mathbb{R}$ si, et seulement si, elle y admet une limite à droite, une limite à gauche et si ces deux limites sont égales.

Définition 3.11 (Limites en $+\infty$)

Soit f une fonction définie sur un intervalle du type $I =]a, +\infty[$ où $a \in \mathbb{R}$.

1. On dit que f a pour limite $\ell \in \mathbb{R}$ en $+\infty$ et on note $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \ell$, si :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists A > 0 \quad : \quad \forall x \in I, \quad A < x \implies |f(x) - \ell| < \varepsilon.$$

2. On dit que f a pour limite $+\infty$ en $+\infty$ et on note $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$, si :

$$\forall M > 0, \quad \exists A > 0 \quad : \quad \forall x \in I, \quad A < x \implies M < f(x).$$

3. On dit que f a pour limite $-\infty$ en $+\infty$ et on note $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$, si :

$$\forall M > 0, \quad \exists A > 0 \quad : \quad \forall x \in I, \quad A < x \implies f(x) < -M.$$

On définit de manière analogue les limites en $-\infty$ pour une fonction f définie au voisinage de $-\infty$.

3.2.2 Propriété des limites**Proposition 3.2 (Opérations sur les limites)**

Soient f et g deux fonctions définies au voisinage de $a \in \overline{\mathbb{R}}$ (sauf éventuellement en a), admettant chacune une limite finie ou infinie en a . **Si l'opération algébrique correspondante dans $\mathbb{R}$ n'est pas une forme indéterminée**, alors :

1. La fonction $f + g$ admet une limite en a et $\lim_{x \rightarrow a} [f(x) + g(x)] = \lim_{x \rightarrow a} f(x) + \lim_{x \rightarrow a} g(x)$.
2. La fonction $f \times g$ admet une limite en a et $\lim_{x \rightarrow a} [f(x) \times g(x)] = \left(\lim_{x \rightarrow a} f(x) \right) \times \left(\lim_{x \rightarrow a} g(x) \right)$.
3. Si de plus g ne s'annule pas au voisinage de a , le quotient $\frac{f}{g}$ admet une limite en a et

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}{\lim_{x \rightarrow a} g(x)}$$

Remarque importante. Les formes indéterminées pour lesquelles ces égalités ne s'appliquent pas nécessitent une étude spécifique pour lever l'indétermination.

Exemple 3.7 (Limites classiques à connaître)

1. Pour tout nombre rationnel r strictement positif,

$$1. \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} x^r = +\infty \qquad 2. \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} x^r = 0$$

$$3. \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^r} = 0 \qquad 4. \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x^r} = +\infty.$$

2. Pour tout entier naturel n non nul,

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x^n = \begin{cases} -\infty & \text{si } n \text{ est impair} \\ +\infty & \text{si } n \text{ est pair} \end{cases} \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x^n} = \begin{cases} -\infty & \text{si } n \text{ est impair} \\ +\infty & \text{si } n \text{ est pair} \end{cases}$$

Exemple 3.8 (Exemples de levée d'indétermination)

Calculer, lorsqu'elles existent, les limites suivantes :

$$\begin{array}{lll} 1. \lim_{x \rightarrow +\infty} (x - \sqrt{x}); & 2. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x+1}{x-1}; & 3. \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x+1} - \sqrt{x}); \\ 4. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2-4}{x-2}; & 5. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x}-1}{x-1}; & 6. \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2}{x-1} - x \right). \end{array}$$

Exemple 3.9

Calculer, lorsqu'elles existent, les limites suivantes : $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{|x|(1+x)}{x}$ et $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{|x|(1+x)}{x}$.

Exercice 3.3

Soit T un réel strictement positif et f une fonction T -périodique sur $\mathbb{R}$.

1. Montrer que si f admet une limite ℓ en $+\infty$ ou en $-\infty$ alors f est constante.
2. En déduire que les fonctions $\cos$ et $\sin$ n'ont pas de limites en $\pm\infty$.

Le résultat suivant est souvent utilisé pour faire apparaître des limites connues.

Théorème 3.1 (Limite d'une composée)

Soit a et b deux réels ou $\pm\infty$. Soit u une fonction définie sur un voisinage I de a et f une fonction définie sur un voisinage J de b . On suppose que $u(I \setminus \{a\}) \subset J \setminus \{b\}$, $\lim_{x \rightarrow a} u(x) = b$ et $\lim_{t \rightarrow b} f(t) = \ell \in \overline{\mathbb{R}}$. Alors $\lim_{x \rightarrow a} f(u(x)) = \lim_{t \rightarrow b} f(t) = \ell$.

Le résultat qui suit n'a pas pour vocation de prouver l'existence d'une limite ou de la calculer. Il s'agit d'une **propriété fondamentale** de l'analyse qui décrit comment l'ordre est préservé lorsqu'on applique l'opération de limite.

Théorème 3.2 (Passage à la limite dans les inégalités)

Soit f et g deux fonctions définies sur un voisinage I du réel a et admettant des limites en a . Si, pour tout $x \in I \setminus \{a\}$, $f(x) \leq g(x)$, alors $\lim_{x \rightarrow a} f(x) \leq \lim_{x \rightarrow a} g(x)$.

Les deux théorèmes suivants sont de puissants outils de calcul. Leur force majeure réside dans le fait qu'ils **prouvent l'existence** d'une limite pour une fonction complexe, en l'encadrant (des deux côtés)

ou en la minorant/majorant (d'un seul côté).

Théorème 3.3 (Théorème d'encadrement (ou des Gendarmes))

Soient f , g et h trois fonctions définies sur un voisinage I de a et soit $\ell \in \mathbb{R}$. Si :

1. Pour tout $x \in I \setminus \{a\}$, $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$,
2. $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \ell$ et $\lim_{x \rightarrow a} h(x) = \ell$,

Alors la fonction f admet une limite en a et : $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell$.

Remarque importante. Ce théorème exige impérativement que la limite commune ℓ soit finie. Si les fonctions extérieures tendent vers $\pm\infty$, on utilise alors les théorèmes de comparaison.

Théorème 3.4 (Théorèmes de comparaison aux infinis)

Soit f et g deux fonctions définies sur un voisinage I de a telles que, pour tout $x \in I \setminus \{a\}$, $f(x) \leq g(x)$.

1. Si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$ alors $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = +\infty$.
2. Si $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = -\infty$ alors $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$.

Remarque (Extension aux limites à l'infini et unilatérales) : Les trois théorèmes présentés ci-dessus restent parfaitement valables pour tous les autres types de limites.

Proposition 3.3

On a : $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$ et $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(x)}{x} = 0$.

Exemple 3.10

Calculer les limites suivantes :

1. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin x}{x}$
2. $\lim_{x \rightarrow 0} x \cos\left(\frac{1}{x}\right)$
3. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan(x)}{x}$
4. $\lim_{x \rightarrow +\infty} [x + \sqrt{x} \sin(x)]$.

Théorème 3.5 (de la limite monotone)

Soit $f :]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ une fonction croissante. Les limites de f à droite en a et à gauche en b existent dans $\overline{\mathbb{R}}$ et :

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \inf(f(]a, b[)) \quad ; \quad \lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = \sup(f(]a, b[))$$

Remarque.

1. L'énoncé de ce théorème reste vrai si $a = -\infty$, ou $b = +\infty$. Le même résultat vaut pour une fonction décroissante, en inversant le rôle de sup et inf.

2. On retiendra que toute fonction monotone sur un intervalle admet une limite à gauche et une limite à droite en tout point de cet intervalle.
3. Les limites à gauche et à droite d'une fonction monotone en un point peuvent ne pas être égales. Par exemple, la fonction partie entière est croissante sur $\mathbb{R}$, et pour tout $n \in \mathbb{Z}$,

$$\lim_{x \rightarrow n^-} \mathbb{E}(x) = n - 1 \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow n^+} \mathbb{E}(x) = n.$$

3.3 Continuité des fonctions réelles

3.3.1 Continuité en un point

Définition 3.12

Soit a un réel a et f une fonction définie sur un voisinage de a . On dit que :

1. f est **continue en** a si f admet une limite en a et si :

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$$

2. f est **continue à droite en** a si f admet une limite à droite en a et si :

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a)$$

3. f est **continue à gauche en** a si f admet une limite à gauche en a et si :

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = f(a)$$

On retiendra qu'une fonction est continue en un point a si, et seulement si, elle est simultanément continue à droite et à gauche en a .

Exemple 3.11

Étudier la continuité des fonctions f et g suivantes au point 2 :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 4}{x - 2} & \text{si } x \neq 2 \\ 3 & \text{si } x = 2 \end{cases} \quad \text{et} \quad g(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 4}{x - 2} & \text{si } x \neq 2 \\ 4 & \text{si } x = 2 \end{cases}$$

Théorème 3.6 (Prolongement par continuité)

Soit I un intervalle, $a \in I$ et $f : I \setminus \{a\} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction. Si la limite $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell$ existe et est finie, alors la fonction $\tilde{f}$ définie sur I par :

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in I \setminus \{a\} \\ \ell & \text{si } x = a \end{cases}$$

est continue en a et est appelée le **prolongement par continuité** de f en a .

Exemple 3.12

La fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = \frac{\sin(x)}{x}$ se prolonge par continuité en 0 car $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1$. Son prolongement par continuité en 0 est la fonction $\tilde{f}$ définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} \frac{\sin(x)}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Théorème 3.7 (Théorèmes généraux sur la continuité)

1. La somme, le produit et le quotient (en tout point où le dénominateur ne s'annule pas) de deux fonctions continues en un point a est une fonction continue en a .
2. Si f est continue en a et si g est continue en $b = f(a)$, alors la fonction composée $g \circ f$ est continue en a .

Remarque d'application : Ce théorème permet d'établir directement la continuité de la majorité des fonctions de l'analyse. Il suffit pour cela de les identifier comme résultant de sommes, produits, quotients ou compositions de fonctions usuelles dont la continuité est déjà établie.

3.3.2 Fonctions continues sur un intervalle**Définition 3.13 (Continuité sur un intervalle)**

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction.

1. On dit que f est **continue sur l'intervalle** I si elle est continue en tout point de I .
2. En particulier, si $I = [a, b]$, f est continue sur $[a, b]$ si elle est continue sur $]a, b[$, continue à droite en a et continue à gauche en b .

Théorème 3.8 (Théorème des valeurs intermédiaires (TVI))

Soit f une fonction continue sur un segment $[a, b]$. Pour tout y_0 compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe au moins un réel $c \in [a, b]$ tel que $f(c) = y_0$. Ce réel c est unique si f est strictement monotone sur $[a, b]$.

Extension à un intervalle quelconque : Dans la pratique, il arrive fréquemment que la fonction soit étudiée sur un intervalle ouvert $I =]a, b[$ (où les bornes peuvent être infinies). Le théorème reste valable en remplaçant les valeurs aux bornes par les limites de la fonction.

Proposition 3.4 (TVI - version limites)

Soient a et b deux éléments de $\overline{\mathbb{R}}$ avec $a < b$ et f une fonction continue sur $]a, b[$. Si $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \ell_a$ et $\lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = \ell_b$, alors pour tout réel y_0 strictement compris entre ℓ_a et ℓ_b , il existe au moins un réel $c \in]a, b[$ tel que $f(c) = y_0$.

Exemple 3.13

Montrer que l'équation $\tan(x) = x$ admet une infinité de solutions réelles. (*Indication : pour tout $n \in \mathbb{Z}$, appliquer le théorème des valeurs intermédiaires sur $I_n =] -\pi/2 + n\pi ; \pi/2 + n\pi[$.*)

Théorème 3.9 (Théorème des bornes atteintes)

Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a, b]$. Alors f est bornée et atteint ses bornes. Autrement dit, il existe deux réels x_1 et x_2 dans $[a, b]$ tels que, pour tout $x \in [a, b]$:

$$f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2)$$

Corollaire 3.1 (L'image d'un segment est un segment)

Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a, b]$. En notant $m = \min_{[a, b]} f$ et $M = \max_{[a, b]} f$, on a :

$$f([a, b]) = [m, M]$$

En particulier, pour tout $y_0 \in [m, M]$, il existe au moins un réel $c \in [a, b]$ tel que $f(c) = y_0$.

Preuve. D'après le théorème 3.9, toutes les images par f sont comprises entre le minimum et le maximum, ce qui nous donne l'inclusion directe : $f([a, b]) \subset [m, M]$.

L'inclusion réciproque découle immédiatement du théorème des valeurs intermédiaires appliqué sur l'intervalle d'extrémités x_1 et x_2 , où $x_1, x_2 \in [a, b]$ vérifient $f(x_1) = m$ et $f(x_2) = M$.

3.3.3 Théorème de la bijection**Définition 3.14 (Définition de la bijection et réciproque)**

Une fonction f est une bijection de I sur J si et seulement si, pour tout $y \in J$, l'équation $f(x) = y$ admet une unique solution x dans I .

Dans ce cas, la fonction $f^{-1} : J \rightarrow I$, qui associe à chaque $y \in J$ cette unique solution, est appelée **fonction réciproque** de f . Elle est caractérisée par :

$$\forall x \in I, \quad f^{-1}(f(x)) = x \quad \text{et} \quad \forall y \in J, \quad f(f^{-1}(y)) = y$$

Autrement dit : $\forall x \in I, \forall y \in J, \quad y = f(x) \iff x = f^{-1}(y)$.

Le résultat fondamental suivant sera appliqué à de nombreuses reprises dans ce cours.

Théorème 3.10 (Théorème de la bijection)

Soit f une fonction définie, continue et **strictement monotone** sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. Alors :

1. L'ensemble image $J = f(I)$ est un intervalle de $\mathbb{R}$ et f réalise une bijection de I sur J .
2. La fonction réciproque $f^{-1} : J \rightarrow I$ est continue sur J .
3. f^{-1} est strictement monotone sur J et possède le **même sens de variation** que f .

Remarques.

1. Sans l'hypothèse de continuité sur f , l'image $f(I)$ **n'est pas forcément un intervalle**. En revanche, la stricte monotonie de f induit son injectivité et, par conséquent, $f : I \rightarrow f(I)$ est une bijection.
2. La nature de l'intervalle image $J = f(I)$ dépend de l'ouverture des bornes de I et du sens de variation de f . Si I est un intervalle de bornes a et b (avec $a < b$, éventuellement infinies), on a les descriptions suivantes selon les cas :

Intervalle I	Si f est strictement croissante	Si f est strictement décroissante
$I = [a, b]$	$f(I) = [f(a), f(b)]$	$f(I) = [f(b), f(a)]$
$I = [a, b[$	$f(I) = \left[f(a), \lim_{x \rightarrow b^-} f(x) \right[$	$f(I) = \left] \lim_{x \rightarrow b^-} f(x), f(a) \right]$
$I =]a, b]$	$f(I) = \left] \lim_{x \rightarrow a^+} f(x), f(b) \right]$	$f(I) = \left[f(b), \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) \right[$
$I =]a, b[$	$f(I) = \left] \lim_{x \rightarrow a^+} f(x), \lim_{x \rightarrow b^-} f(x) \right[$	$f(I) = \left] \lim_{x \rightarrow b^-} f(x), \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) \right[$

Note : Si une borne de I est infinie ($a = -\infty$ ou $b = +\infty$), la borne correspondante de $f(I)$ s'exprime obligatoirement à l'aide de la limite (qui peut elle-même être infinie) et l'intervalle est alors ouvert en cette borne.

3. Dans le plan muni d'un repère orthonormé, la relation fondamentale :

$$(x, y) \in \mathcal{G}_f \iff \begin{cases} y = f(x) \\ x \in I \end{cases} \iff \begin{cases} x = f^{-1}(y) \\ y \in J \end{cases} \iff (y, x) \in \mathcal{G}_{f^{-1}}$$

démontre que les graphes $\mathcal{G}_{f^{-1}}$ et $\mathcal{G}_f$ sont **symétriques** par rapport à la première bissectrice.

Propriétés 3.1 (Parité de la réciproque)

Soit $f : I \rightarrow J$ une fonction bijective. Si f est impaire sur I , alors f^{-1} est impaire sur J .

Exemple 3.14

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 + 1$. Montrer que f est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$ et déterminer sa fonction réciproque.

3.4 Dérivabilité des fonctions réelles**3.4.1 Dérivée d'une fonction****Définition 3.15**

Soit f une fonction réelle définie sur un intervalle ouvert I de $\mathbb{R}$ et soit $a \in I$.

- On dit que f est **dérivable en a** si le taux d'accroissement de f en a admet une limite finie lorsque x tend vers a . Cette limite est appelée le **nombre dérivé** de f en a et est

notée $f'(a)$:

$$f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

En posant $x = a + h$, cette définition équivaut à : $f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a + h) - f(a)}{h}$.

- On dit que f est dérivable sur I si elle est dérivable en tout point $x \in I$. La fonction $f' : x \mapsto f'(x)$ est appelée la fonction dérivée de f .

Interprétation géométrique. Le nombre dérivé $f'(a)$ est le coefficient directeur de la tangente au graphe de f au point d'abscisse a . Une équation cartésienne de cette tangente est donnée par :

$$y = f'(a)(x - a) + f(a)$$

Exemple 3.15

Utiliser la définition pour déterminer $f'(x)$ dans les cas suivants :

- | | | |
|---|--|----------------------|
| 1. $f(x) = \alpha x + \beta$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. | 3. $f(x) = \frac{1}{x}$, $x \in \mathbb{R}^*$. | 5. $f(x) = \sin x$. |
| 2. $f(x) = \sqrt{x}$, $x \in]0, +\infty[$. | 4. $f(x) = x^n$, $n \in \mathbb{N}^*$. | 6. $f(x) = \cos x$. |

Il peut se faire que le taux d'accroissement admette seulement une limite unilatérale en a , auquel cas on parle de dérivée à gauche ou de dérivée à droite.

Définition 3.16 (Dérivée à droite, à gauche)

Soit f une fonction définie sur un intervalle contenant a .

- On dit que f est dérivable à droite en a si la limite $\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(a + h) - f(a)}{h}$ existe dans $\mathbb{R}$. Cette limite, notée $f'_d(a)$, est alors appelée la dérivée de f à droite en a .
- On dit que f est dérivable à gauche en a si la limite $\lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(a + h) - f(a)}{h}$ existe dans $\mathbb{R}$. Cette limite, notée $f'_g(a)$, est alors appelée la dérivée de f à gauche en a .

Proposition 3.5

Une fonction f est dérivable en a si et seulement si elle est dérivable à gauche et à droite en a , et si ces deux nombres dérivés sont égaux : $f'_g(a) = f'_d(a)$.

Complément.

1. Si $f'_g(a) \neq f'_d(a)$ alors que les deux limites existent, le point $(a, f(a))$ est appelé un **point anguleux** de la courbe.
2. Si f est continue en a et si $\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(a + h) - f(a)}{h} = +\infty$ ou si $\lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(a + h) - f(a)}{h} = -\infty$, le graphe de f possède une demi-tangente verticale en $(a, f(a))$ dirigée vers le haut.
3. Si f est continue en a et si $\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(a + h) - f(a)}{h} = -\infty$ ou si $\lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(a + h) - f(a)}{h} = +\infty$, le

graphe de f possède une demi-tangente verticale en $(a, f(a))$ dirigée vers le bas.

Exemple 3.16

1. Soit $f(x) = |x|$. Montrer que f est continue en 0 puis étudier sa dérivabilité en ce point. Interpréter graphiquement le résultat.
2. Soit $f(x) = \sqrt{x}$. Étudier la dérivabilité de f à droite en 0. Interpréter graphiquement le résultat.
3. Soit $f(x) = \sqrt{|x|}$. Montrer que f est continue en 0 puis étudier sa dérivabilité en ce point. Interpréter graphiquement le résultat.

Proposition 3.6 (Lien avec la continuité)

Si une fonction est dérivable à droite (resp. à gauche) en un point, alors elle est continue à droite (resp. à gauche) en ce point. A fortiori, si une fonction est dérivable en un point, alors elle est continue en ce point.

Remarque. La réciproque est fausse comme on peut le voir avec l'exemple classique de la fonction valeur absolue $x \mapsto |x|$. Elle est continue en 0 mais n'y est pas dérivable.

3.4.2 Techniques de dérivation

Théorème 3.11 (Règles de calcul)

Soient u et v deux fonctions dérivables sur I .

1. Pour tout $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, la fonction $\lambda u + \mu v$ est dérivable sur I et on a :

$$(\lambda u + \mu v)'(x) = \lambda u'(x) + \mu v'(x).$$

2. La fonction uv est dérivable sur I et on a : $(uv)'(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$.

3. Si v ne s'annule pas sur I , les fonctions $\frac{1}{v}$ et $\frac{u}{v}$ sont dérivables sur I et on a :

$$\left(\frac{1}{v}\right)'(x) = -\frac{v'(x)}{[v(x)]^2} \quad \text{et} \quad \left(\frac{u}{v}\right)'(x) = \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{[v(x)]^2}.$$

Exemple 3.17

Calculer $f'(x)$ dans les cas suivants :

$$1. f(x) = \frac{1}{x} + 2\sqrt{x}$$

$$2. f(x) = \sqrt{x} \cos(x)$$

$$3. f(x) = \frac{1}{x^2 + \sqrt{x}}$$

$$4. f(x) = \tan x := \frac{\sin x}{\cos x}.$$

Théorème 3.12 (Dérivée de la composée)

Soient $f : J \rightarrow \mathbb{R}$ et $u : I \rightarrow \mathbb{R}$ telles que $u(I) \subset J$. Si u est dérivable sur I et f est dérivable sur J . Alors la fonction $f \circ u$ est dérivable sur I et, pour $x \in I$, $(f \circ u)'(x) = f'(u(x))u'(x)$.

Exemple 3.18

Calculer $f'(x)$ dans les cas suivants :

1. $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$

2. $f(x) = \cos(x^2 + 1)$

3. $f(x) = (x^2 + 1)^3$

Théorème 3.13 (Dérivée de la réciproque)

Soit $f : I \rightarrow J$ une fonction bijective et soit $f^{-1} : J \rightarrow I$ sa fonction réciproque.

- Si f est dérivable en $a \in I$ et si $f'(a) \neq 0$ alors f^{-1} est dérivable en $b = f(a)$ et,

$$(f^{-1})'(b) = \frac{1}{f'(f^{-1}(b))}.$$

- Si f est dérivable sur I et si f' ne s'annule pas sur I alors f^{-1} est dérivable sur J et, pour tout $x \in J$,

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'[f^{-1}(x)]}.$$

Exemple 3.19

Montrer que la fonction racine cubique est dérivable sur $\mathbb{R}^*$, étudier sa dérivabilité en 0 et donner sa dérivée.

3.4.3 Monotonie, extremums et convexité

Pour lier localement le comportement de la dérivée aux variations globales d'une fonction, on s'appuie sur le résultat fondamental suivant, appelé **Théorème des Accroissements Finis (TAF)**.

Théorème 3.14 (Théorème des Accroissements Finis)

Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$. Alors, il existe au moins un réel $c \in]a, b[$ tel que : $f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$.

C'est grâce à cette caractérisation que l'on démontre rigoureusement le lien entre le signe de la dérivée et les variations (ainsi que les extremums) d'une fonction sur un intervalle.

Théorème 3.15

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. Alors,

1. f est constante sur I si et seulement si sa dérivée f' est identiquement nulle sur I .

2. f est croissante sur I si et seulement si f' est positive ou nulle sur I . Si de plus f' ne s'annule qu'en des points isolés, f est strictement croissante.
3. f est décroissante sur I si et seulement si f' est négative ou nulle sur I . Si de plus f' ne s'annule qu'en des points isolés, f est strictement décroissante.

Remarque. Le fait que les résultats soient énoncés sur un **intervalle** est fondamental. Par exemple, la dérivée de $x \mapsto 1/x$ est strictement négative sur son ensemble de définition, mais la fonction n'est pas décroissante sur $\mathbb{R}^*$.

Théorème 3.16 (Condition nécessaire d'extremum local)

Soit f une fonction dérivable en un point a d'un intervalle **ouvert** I . Si f admet un extremum local (maximum ou minimum) en a , alors $f'(a) = 0$.

Remarque. La condition n'est pas suffisante. Par exemple, la fonction $x \mapsto x^3$ a une dérivée qui s'annule en 0 ($f'(0) = 0$), mais 0 n'est ni un maximum ni un minimum local.

Proposition 3.7

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle ouvert I de $\mathbb{R}$ et soit $a \in I$.

- Si f' s'annule en a en changeant de signe, alors f admet un extremum local en a .
- Si f' s'annule en a sans changer de signe, alors $(a, f(a))$ est un point d'inflexion (la tangente en $(a, f(a))$ traverse le graphe en $(a, f(a))$).

Exemple 3.20

Étudier les variations de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3x^5 - 5x^3$. On précisera les points critiques et la nature de ceux-ci.

Proposition 3.8 (Théorème de la limite de la dérivée)

Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$.

- Si $\lim_{x \rightarrow b^-} f'(x) = \ell \in \mathbb{R}$, alors f est dérivable à gauche en b et $f'_g(b) = \ell$.
- Si $\lim_{x \rightarrow b^-} f'(x) = \pm\infty$, alors $\lim_{x \rightarrow b^-} \frac{f(x) - f(b)}{x - b} = \pm\infty$. En d'autres termes, la courbe représentative de f possède une demi-tangente verticale au point $(b, f(b))$.

On retiendra que l'on dispose aussi de résultats analogues pour une limite à droite en a .

Définition 3.17 (Convexité et stricte convexité)

Soit f une fonction réelle définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.

- On dit que f est **convexe** sur I si pour tous $x, y \in I$ et pour tout $\lambda \in [0, 1]$:

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y)$$

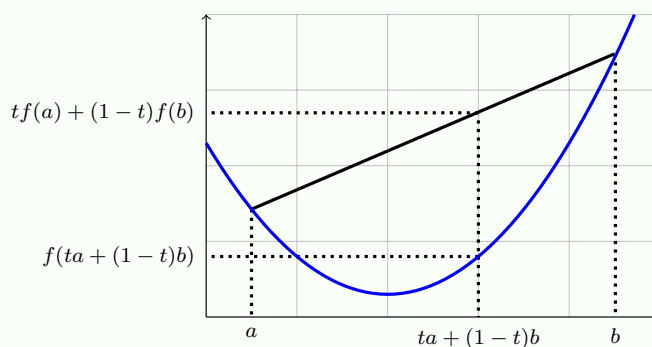
- On dit que f est **strictement convexe** sur I si pour tous $x \neq y$ dans I et pour tout $\lambda \in]0, 1[$:

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) < \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y)$$

- On dit que f est **concave** (resp. strictement concave) si $-f$ est convexe (resp. strictement convexe).

Interprétation géométrique

Une fonction est convexe sur un intervalle I si son graphe sur I est situé en dessous de chacun des segments reliant deux de ses points.



Définition 3.18 (Dérivée seconde)

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I . Si la fonction f' est elle-même dérivable sur I , sa dérivée, notée f'' ou $f^{(2)}$, est appelée la **dérivée seconde** de f .

Le critère suivant est à la fois le plus simple et le plus puissant pour l'étude de la convexité des fonctions usuelles.

Théorème 3.17

Soit f une fonction deux fois dérivable sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.

- Si f'' est positive ou nulle sur I alors f est convexe sur I . Si de plus f'' ne s'annule qu'en des points isolés, f est strictement convexe sur I .
- Si f'' est négative ou nulle sur I alors f est concave sur I . Si de plus f'' ne s'annule qu'en des points isolés, f est strictement concave sur I .
- Si f'' s'annule en $a \in I$ en changeant de signe alors $(a, f(a))$ est un point d'inflexion.

Exemple 3.21

Soit $f(x) = \frac{2x}{(x+1)^2}$. Étudier la convexité de f , déterminer les éventuels points d'inflexion du graphe de f et préciser la tangente en ces points.

3.5 Plan d'étude d'une fonction réelle

L'étude complète d'une fonction réelle f comporte les points suivants.

1. **Domaine de définition.** Déterminer l'ensemble $D_f = \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) \in \mathbb{R}\}$. Et étudier éventuellement la parité et la périodicité.
2. **Limites et branches infinies.** On calcule les limites de f aux bornes de son domaine de définition et on en donne éventuellement une interprétation géométrique.
 - (a) Si $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \pm\infty$. Dans ce cas, la droite d'équation $x = x_0$ est asymptote (verticale) au graphe de f .
 - (b) Si $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \ell \in \mathbb{R}$. Dans ce cas, la droite d'équation $y = \ell$ est asymptote (horizontale) au graphe de f au voisinage de $\pm\infty$.
 - (c) Si $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \pm\infty$ et $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \pm\infty$, le graphe de f admet une branche parabolique de direction asymptotique l'axe des y .
 - (d) Si $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \pm\infty$ et $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$, le graphe de f admet une branche parabolique de direction asymptotique l'axe des x .
 - (e) Si, pour un réel a , $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} [f(x) - ax] = \pm\infty$, le graphe de f admet une branche parabolique de direction asymptotique la droite d'équation $y = ax$.
 - (f) Si, pour deux réels a et b , $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0$, le graphe de f admet la droite Δ d'équation $y = ax + b$ comme asymptote.
3. **Variations et points critiques.** Calculer la dérivée et chercher les points critiques de f . Faire un tableau de variations et préciser la nature des extremums.
4. **Convexité et points d'inflexion.** Calculer la dérivée seconde f'' et déterminer son signe. Cela permet d'identifier les points d'inflexion.
5. **Représentation graphique.** Faire un grand dessin où l'on représente le graphe de la fonction, les asymptotes et les points particuliers.

Exercice 3.4

Soit $f(x) = \frac{x^3}{(x-1)^2}$.

1. Déterminer le domaine de définition D_f de f .
2. Calculer les limites de f aux bornes de D_f .
3. Calculer la dérivée et chercher les points critiques de f . Dresser le tableau de variations et identifier les minimums et les maximums.

4. Calculer la dérivée seconde f'' et déterminer son signe. Le graphe de f admet-il des points d'inflexion ?
5. Tracer le graphe de la fonction, on précisera les asymptotes et les points particuliers.

3.6 Fonctions et suites

3.6.1 Caractérisation séquentielle de la continuité

Théorème 3.18 (Caractérisation séquentielle de la limite)

La fonction f a pour limite $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$ en $a \in \overline{\mathbb{R}}$ si et seulement si, pour toute suite (u_n) telle que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = a$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(u_n) = \ell$.

Remarques.

1. s'il existe une suite (u_n) dont la limite est a de sorte que la suite $(f(u_n))$ soit divergente alors $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ n'existe pas,
2. s'il existe deux suites (u_n) et (v_n) de même limite a telles que les suites $(f(u_n))$ et $(f(v_n))$ aient des limites différentes alors $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ n'existe pas.

Exemple 3.22

Soit T un réel strictement positif et f une fonction T -périodique sur $\mathbb{R}$.

1. Montrer que si f admet une limite ℓ en $+\infty$ ou en $-\infty$ alors f est constante.
2. En déduire que les fonctions $\cos$ et $\sin$ n'ont pas de limites en $\pm\infty$.

Proposition 3.9 (Caractérisation séquentielle de la continuité)

Soit une fonction $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ et un point $a \in I$. Alors, f est continue en a si, et seulement si, pour toute suite (u_n) de points de I qui converge vers a , la suite $(f(u_n))$ converge vers $f(a)$.

Exemple 3.23

La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \cos\left(\frac{1}{x}\right)$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 0$ n'est pas continue en 0. En effet, la suite de terme général $u_n = \frac{1}{n\pi}$ converge vers 0 mais la suite $(f(u_n))$ est divergente.

3.6.2 Les Suites Récurrentes

On s'intéresse aux suites (u_n) définies par un premier terme u_0 et une relation de récurrence faisant intervenir une fonction f .

Théorème 3.19

Soit f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et (u_n) la suite définie par $u_0 \in I$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Si la suite (u_n) converge vers une limite ℓ et si f est **continue** en ℓ , alors ℓ est un **point fixe** de f , c'est-à-dire que :

$$f(\ell) = \ell.$$

Mise en garde : Le fait que $f(x) = x$ ait une solution ne garantit pas que la suite converge ! Il faut d'abord prouver la convergence (souvent via le théorème de convergence monotone). En revanche, si l'équation $f(x) = x$ n'a pas de solution, la suite diverge.

Condition d'existence : Pour que la suite soit bien définie, on détermine un intervalle I contenant u_0 et stable par f , c'est-à-dire $f(I) \subseteq I$: Si I est stable par f et si $u_0 \in I$ on montre par récurrence que $u_n \in I$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Étude de la monotonie : Le sens de variation de la suite (u_n) dépend des variations de f et de la position de u_1 par rapport à u_0 .

- **Cas A : f est croissante sur I .** La suite (u_n) est monotone.
 - Si $u_1 \geq u_0$, alors (u_n) est **croissante**.
 - Si $u_1 \leq u_0$, alors (u_n) est **décroissante**.
- **Cas B : f est décroissante sur I .** La suite (u_n) n'est pas monotone. Cependant, les sous-suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont monotones et de sens de variation opposés.

Fiche Méthode : Étude d'une suite récurrente

Face à un exercice du type « Étudier la suite $u_{n+1} = f(u_n)$ », suivez cet ordre logique :

1. **Points fixes :** Résoudre l'équation $f(x) = x$ pour trouver la valeur éventuelle de la limite en cas de convergence.
2. **Existence :** Montrer par récurrence que u_n reste dans un intervalle I où f est bien définie.
3. **Monotonie :**
 - Si f est **croissante** sur I , alors la suite (u_n) est **monotone**. Son sens de variation dépend uniquement du signe de $u_1 - u_0$.
 - Si f est **décroissante** sur I , la suite (u_n) n'est pas monotone. Les sous-suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) ont alors des sens de variations opposés.
4. **Convergence :** Citer le théorème de convergence monotone (suite croissante + majorée, ou décroissante + minorée) et conclure.

Exemple 3.24

Soit f la fonction définie sur $[-2, +\infty[$ par $f(x) = \sqrt{2+x}$ et (u_n) la suite définie par $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1. Déterminer les points fixes de f .
2. Montrer par récurrence que $u_n \in [0, 2]$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
3. Montrer que la suite (u_n) est croissante.
4. En déduire que (u_n) est convergente. Quelle est sa limite ?

Chapitre 4

Fonctions usuelles

4.1 Logarithme népérien

Définition 4.1

La fonction logarithme népérien, notée $\ln$, est l'unique fonction réelle définie sur $]0, +\infty[$, telle que $\ln(1) = 0$ et, pour tout $x \in]0, +\infty[$, $\ln'(x) = \frac{1}{x}$.

Remarque. On peut également définir $\ln(x)$ comme l'unique primitive s'annulant en 1 de la fonction $t \mapsto \frac{1}{t}$ sur $]0, +\infty[$: $\ln(x) = \int_1^x \frac{dt}{t}$. Ce résultat sera démontré ultérieurement (cf. Analyse 2).

Proposition 4.1 (Propriétés algébriques)

Pour tous réels strictement positifs x et y et tout nombre réel a , on a :

1. $\ln(xy) = \ln(x) + \ln(y)$,
2. $\ln\left(\frac{1}{x}\right) = -\ln(x)$,
3. $\ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln(x) - \ln(y)$,
4. $\ln(x^a) = a \ln(x)$.

Exemple 4.1

Simplifier les expressions suivantes :

1. $4 \ln(2) - \ln(3) + \ln(6)$
2. $\ln(\sqrt{2} + 1) + \ln(\sqrt{2} - 1)$

Proposition 4.2

1. La fonction $\ln$ est continue et strictement croissante sur $]0, +\infty[$ car $(\ln)'(x) = \frac{1}{x} > 0$
2. Limites fondamentales : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x) = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln(x) = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$.
3. L'image de la fonction $\ln$ est $\mathbb{R}$.

Exemple 4.2

Après avoir déterminé leur domaine de validité, résoudre dans $\mathbb{R}$, les équations suivantes :

1. $\ln(4x) - 3 \ln(x) = \ln(2)$,
2. $\ln(x+1) + \ln(x-1) = \ln(3)$.

4.2 Exponentielle népérien

Proposition 4.3 (Définition)

La fonction $\ln$ réalise une bijection de $]0, +\infty[$ sur $\mathbb{R}$ et sa fonction réciproque est la fonction exponentielle :

$$\begin{aligned} \exp &: \mathbb{R} \rightarrow]0, +\infty[\\ x &\mapsto \exp(x). \end{aligned}$$

Ce résultat découle du théorème de la bijection puisque la fonction $\ln$ est strictement croissante. Par inversion, on dispose des identités clés :

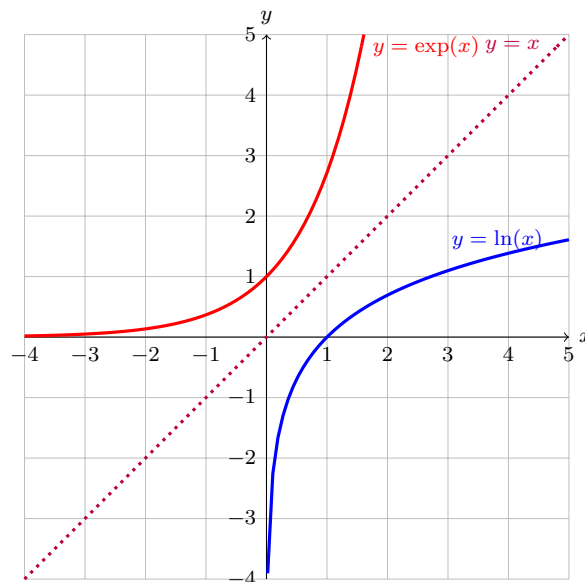
$$\forall x \in]0, +\infty[, \quad \exp[\ln(x)] = x \quad \text{et} \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad \ln[\exp(x)] = x.$$

Notation. Soit a un réel strictement positif. Pour tout réel x , la formule 4 de la proposition 4.1 donne

$$\ln(a^x) = x \ln(a) \iff a^x = \exp[x \ln(a)].$$

Le nombre de Néper étant l'unique réel e tel que $\ln(e) = 1$, en prenant $a = e$, on voit que, pour tout réel x , $e^x = \exp(x)$.

Tracé des graphes de $\ln$ et $\exp$. Les graphes de $\ln$ et $\exp$ dans un repère orthonormé sont symétriques par rapport à la première bissectrice.



Proposition 4.4 (Propriétés algébriques)

Pour tous nombres réels x et y et tout nombre réel r , on a :

$$\begin{aligned} 1. \quad e^{x+y} &= e^x e^y, & 2. \quad e^{-x} &= \frac{1}{e^x}, \\ 3. \quad e^{x-y} &= \frac{e^x}{e^y}, & 4. \quad (e^x)^r &= e^{rx}. \end{aligned}$$

Exemple 4.3

Résoudre, dans $\mathbb{R}$, les équations suivantes :

$$1. e^x - xe^x = 0 \quad 2. e^x - e^{-x} = 2 \quad 3. e^{-2x} - 3e^{-x} = -2.$$

Proposition 4.5 (Analyse de l'exponentielle)

1. La fonction exponentielle est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
2. Elle est dérivable sur $\mathbb{R}$ avec $(e^x)' = e^x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
3. Limites fondamentales : $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$ et $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$.

4.3 Fonctions puissances

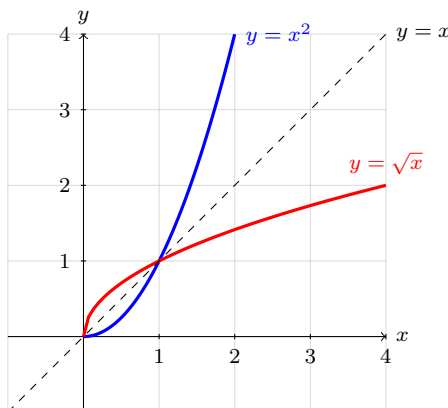
Puissances à exposants rationnels : Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et f la fonction puissance d'exposant n définie sur $\mathbb{R}$ par $f(y) = y^n$.

- **Si n est impair :** La fonction f est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$. Elle réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$ et sa fonction réciproque $f^{-1} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est la **fonction racine n -ième**. Pour tout réel x , $f^{-1}(x) = \sqrt[n]{x}$. Comme $f'(y) = ny^{n-1}$ ne s'annule qu'en $y = 0$, f^{-1} est **dérivable sur $\mathbb{R}^*$** et, pour tout $x \in \mathbb{R}^*$:

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{n(\sqrt[n]{x})^{n-1}}$$

- **Si n est pair :** La fonction f n'est pas bijective sur $\mathbb{R}$. Sa restriction g à $[0, +\infty[$ est continue et strictement croissante sur $[0, +\infty[$. Elle réalise une bijection de $[0, +\infty[$ sur $[0, +\infty[$ et sa fonction réciproque $g^{-1} : [0, +\infty[\rightarrow [0, +\infty[$ est la **fonction racine n -ième**. Pour tout réel $x \geq 0$, $g^{-1}(x) = \sqrt[n]{x}$ (on note simplement $\sqrt{x}$ pour $n = 2$). Comme $g'(y) = ny^{n-1}$ ne s'annule qu'en $y = 0$, g^{-1} est **dérivable sur $]0, +\infty[$** et, pour tout $x > 0$:

$$(g^{-1})'(x) = \frac{1}{n(\sqrt[n]{x})^{n-1}}$$

**Exercice 4.1**

Étudier la dérivabilité à droite en 0 de la fonction racine n -ième.

Les fonctions puissances entières et racines n -ièmes permettent de définir les fonctions puissances à exposants rationnels.

Exercice 4.2 (Puissances à exposants rationnels)

Soit $r = \frac{p}{q}$ un nombre rationnel, où $p \in \mathbb{Z}^*$ et $q \in \mathbb{N}^*$, et f_r la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par :

$$f_r(x) = x^r = \sqrt[q]{x^p}$$

1. Montrer que la fonction f_r peut s'écrire sous la forme d'une composée $f_r = h \circ u$, où u et h sont deux fonctions à préciser.
2. En déduire que f_r est dérivable sur $]0, +\infty[$ et en appliquant la formule de la dérivée d'une fonction composée, montrer que :

$$\forall x \in]0, +\infty[, \quad f'_r(x) = rx^{r-1}$$

3. En déduire les variations de f_r (on distinguera deux cas $r > 0$ et $r < 0$).
4. Calculer les limites de f aux bornes de son domaine de définition. En déduire que f_r se prolonge par continuité en 0 si et seulement si $r > 0$.
5. On suppose $r > 0$. Étudier la dérivabilité à droite en 0 de la fonction prolongée et interpréter graphiquement le résultat.

Puissances à exposants réels : Pour tout $a \in \mathbb{R}$, la puissance x^a est obtenue sur $]0, +\infty[$ par prolongement continu des puissances rationnelles. Elle coïncide, d'après le quatrième point de la proposition 4.1 avec l'identité $x^a = e^{a \ln(x)}$.

Exercice 4.3 (Étude de la fonction puissance)

Soit $a \in \mathbb{R}^*$. On considère la fonction puissance f_a définie sur $]0, +\infty[$ par :

$$f_a(x) = x^a = e^{a \ln(x)}$$

1. Montrer que f_a est dérivable sur $]0, +\infty[$ et que, pour tout $x \in]0, +\infty[$, $f'_a(x) = ax^{a-1}$.
2. En déduire le sens de variation de f_a sur $]0, +\infty[$.
3. Montrer que la fonction f_a réalise une bijection de l'intervalle $]0, +\infty[$ sur un intervalle à préciser et donner sa fonction réciproque.
4. Montrer que f_a se prolonge par continuité en 0 si et seulement si $a > 0$. Étudier alors la dérivabilité à droite en 0 de la fonction prolongée et interpréter graphiquement le résultat.

Proposition 4.6 (Croissances comparées)

Pour tous réels strictement positifs a , b et c :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x^a} = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^b}{e^{cx}} = 0$$

Proposition 4.8

1. La fonction arcsin est strictement décroissante et continue sur $[-1, 1]$.
2. Pour tout $x \in [-1, 1]$, $\sin[\arccos(x)] = \sqrt{1 - x^2}$.
3. La fonction arccos est dérivable sur $] - 1, 1[$ et, pour tout $x \in] - 1, 1[$,

$$(\arccos)'(x) = \frac{-1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

Exercice 4.6

Étudier la dérivabilité de la fonction arccos à gauche en 1 et à droite en -1 . Interpréter graphiquement le résultat.

Exercice 4.7

On considère l'équation $(E) : \arccos(x) = \arcsin(1 - x)$.

1. Déterminer le domaine de validité de l'équation (E) .
2. Résoudre, dans $\mathbb{R}$, l'équation (E) .

Exercice 4.8

Soit f la fonction définie par $f(x) = \arccos(1 - 2x^2)$.

1. Déterminer le domaine de définition D_f et préciser la parité de f .
2. Calculer $f'(x)$ pour $x \in]0, 1[$, et en déduire une expression simple de $f(x)$ d'abord sur $[0, 1]$ et puis sur D_f .
3. Étudier la dérivabilité de f en 0, 1 et -1 .
4. Tracer le graphe de f .

4.4.3 La fonction arctan**Définition 4.4 (Proposition)**

La restriction de la fonction tangente à l'intervalle $I = \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[$ réalise une bijection de I sur $\mathbb{R}$. Sa fonction réciproque est notée arctan :

$$\arctan : \mathbb{R} \rightarrow \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[\quad \text{avec} \quad \arctan(x) = y \iff \tan(y) = x$$

Ce résultat découle du théorème de la bijection. Par inversion, on dispose des identités clés :

$$\forall x \in \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[, \quad \arctan[\tan(x)] = x \quad \text{et} \quad \forall x \in [-1, 1], \quad \tan[\arctan(x)] = x.$$

Exemple 4.8

1. Simplifier l'expression $\arctan \left[\tan \left(\frac{9\pi}{5} \right) \right]$.
2. Compléter le tableau des valeurs particulières suivant :

x	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	$+\infty$
$\arctan(x)$					

Proposition 4.9

1. La fonction $\arctan$ est impaire, strictement croissante et continue sur $\mathbb{R}$.
2. La fonction $\arctan$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$(\arctan)'(x) = \frac{1}{1+x^2}.$$

Exercice 4.9

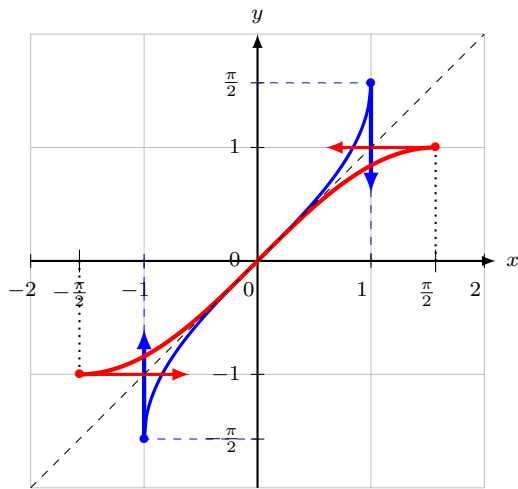
1. Soit $\alpha \in \left] -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right[$. Démontrer les identités suivantes :

$$\cos^2(\alpha) = \frac{1}{1+\tan^2(\alpha)} \quad \text{et} \quad \sin^2(\alpha) = \frac{\tan^2(\alpha)}{1+\tan^2(\alpha)}$$

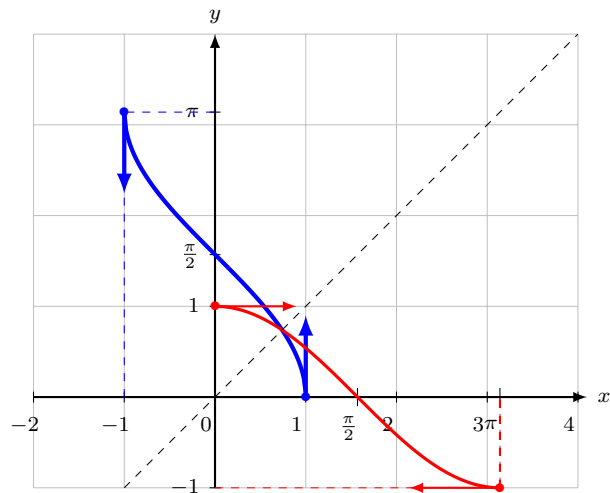
2. En déduire que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\cos(\arctan x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ et $\sin(\arctan x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$.

3. Vérifier que $2 \arctan \left(\frac{1}{2} \right) = \arcsin \left(\frac{4}{5} \right)$.

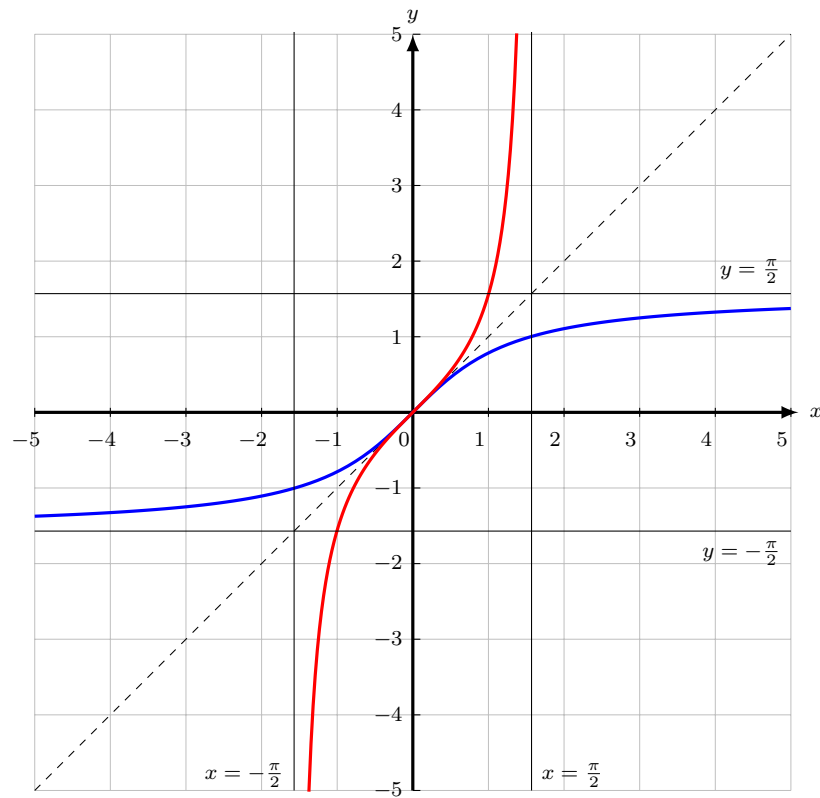
Tracé des graphes. Les graphes des fonctions arcsin, arccos et arctan sont représentés en bleu.



Graphique de $y = \arcsin(x)$



Graphique de $y = \arccos(x)$



Graphique de $y = \arctan(x)$