L2S4 - Calcul matriciel

Correction des exercices 24(1), 25, 26, 29, 31

qkzk

2021/03/06

Systèmes linéaires

Exercice 24

Résoudre le système suivant d'inconnues x, y et z :

$$\begin{cases} x+3y+5z & = 22 \\ -x+2y+3z & = 12 \\ -12x+y-z & = -13 \end{cases}$$

Correction Exercice 24 question 1

Résoudre $\begin{cases} x+3y+5z & = 22 \\ -x+2y+3z & = 12 \\ -12x+y-z & = -13 \end{cases}$

Il faut parfois avoir beaucoup de confiance en soi... ici tout se simplifie dans les moments critiques (aucun moyen de le deviner, je vous le dis).

$$\begin{cases} x+3y+5z & = 22 \\ -x+2y+3z & = 12 \\ -12x+y-z & = -13 \end{cases}$$

$L_1 \leftarrow L_1 + L_2; L_3 \leftarrow L_3 + 12L_1$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+3y+5z = 22 \\ 5y+8z = 34 \\ 37y+59z = 251 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x+3y+5z = 22 \\ 5y+8z = 34 \\ 37y+59z = 251 \end{cases}$$

$L_3 \leftarrow 5L_3 - 37L_2$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+3y+5z = 22 \\ 5y+8z = 34 \\ -z = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+3y+5z = 22 \\ 5y+8z = 34 \\ z = 3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+3y+5z = 22 \\ 5y = 34 - 8 \times 2 = 10 \\ z = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -3y - 5z + 22 \\ y = 2 \\ z = 3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \\ z = 3 \end{cases}$$

Exercice 25

énoncé trop long

Correction Exercice 25

Nombre d'employés, techniciens, cadres ?

On note x le nombre d'employés, y le nombre de techniciens et z celui des cadres.

- Personnes $\Leftrightarrow x + y + z = 60$
- Salaires : $1500x + 2600y + 4200z = 114\ 000$
- Augmentations : $1.064 \times 1500x + 1.045 \times 2600y + 1.045 \times 4200z = 1.056 \times 114\ 000$
- Différence entre salaires augmentés et salaires de départ : $0.064\times1500x+0.045\times2600y+0.045\times4200z = 0.056\times114\ 000$

système

$$\begin{cases} x + y + z = 60 \\ 15x + 26y + 42z = 1140 \\ 96x + 117y + 189z = 6384 \end{cases}$$

L_3 se simplifie par 3.

$$\begin{cases} x + y + z = 60 \\ 15x + 26y + 42z = 1140 \\ 32x + 39y + 63z = 2128 \end{cases}$$

$L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2$

$$\begin{cases} x + y + z = 60 \\ 15x + 26y + 42z = 1140 \\ 2x - 13y - 21z = -152 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + y + z = 60 \\ 15x + 26y + 42z = 1140 \\ 2x - 13y - 21z = -152 \end{cases}$$

$L_2 \leftarrow L_2 - 15L_1; L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1 \qquad L_3 \leftarrow 15L_2 + 11L_3$

$$\begin{cases} x + y + z = 60 \\ 11y + 27z = 240 \\ -15y - 23z = -272 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y + z = 60 \\ 11y = -27z + 240 \\ 152z = 608 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = -y - z + 60 \\ 11y = 132 \\ z = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 44 \\ y = 12 \\ z = 4 \end{cases}$$

Exercice 26

Résoudre (S) en discutant selon les valeurs du paramètre a :

$$(S) \Leftrightarrow \begin{cases} ax+y+z & =1 \\ ,x+ay+z & =a \\ ,x+y+az & =a^2 \end{cases}.$$

Correction Exercice 26

$$(S) \Leftrightarrow \begin{cases} ax+y+z & =1 \\ ,x+ay+z & =a \\ ,x+y+az & =a^2 \end{cases}.$$

Avant de se lancer il faut décider d'un pivot.

La meilleure approche est d'échanger les lignes 1 et 2 : z, y, x

$$(S) \Leftrightarrow \begin{cases} x+ay+z & =a \\ ,ax+y+z & =1 \\ ,x+y+az & =a^2 \end{cases}.$$

26.2

On réalise les opérations suivantes :

$L_2 \leftarrow L_2 - aL_1, L_3 \leftarrow L_3 - L_1$. Il vient :

$$(S) \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} x+ay+z & = & a \\ (1-a^2)y+(1-a)z & = & 1-a^2 \\ (1-a)y+(a-1)z & = & a^2-a \end{array} \right.$$

Supposons $a \neq 1$ afin de diviser par $1-a$. Nous devrons traiter ce cas $a=1$ plus tard.

On divise les secondes et troisième ligne par $1-a$.

26.3

Remarquons que $1-a^2 = (1-a)(1+a)$ et $a^2-a = a(a-1) = -a(1-a)$. Il vient :

$$\text{Si } a \neq 1, (S) \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} x+ay+z & = & a \\ (1+a)y+z & = & 1+a \\ y-z & = & -a \end{array} \right.$$

Dans ce système on fait l'opération $L_3 \leftarrow L_2 + L_3$

$$\text{Si } a \neq 1, (S) \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} x+ay+z & = & a \\ (1+a)y+z & = & 1+a \\ (2+a)y & = & 1 \end{array} \right.$$

26.4

On suppose de plus que $a \neq -2$ et alors

$$\text{Si } a \neq 1 \text{ et } a \neq -2, (S) \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} y & = & \frac{1}{2+a} \\ z & = & y+a \\ x & = & a-ay-az \end{array} \right.$$

$$\text{Si } a \neq 1 \text{ et } a \neq -2, (S) \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} x & = & \frac{-a-1}{2+a} \\ y & = & \frac{1}{2+a} \\ z & = & \frac{1+2a+a^2}{2+a} \end{array} \right.$$

On vérifie aisément que cette solution fonctionne dans le premier système.

26.5

Il reste à traiter les cas $a = 1$ et $a = -2$.

Si $a = 1$ les trois lignes sont identiques : $x + y + z = 1$. On obtient un plan de solutions dans l'espace.

Si $a = -2$ le système s'écrit :

$$(S) \Leftrightarrow \begin{cases} -2x + y + z & = 1 \\ , x - 2y + z & = -2 \\ , x + y - 2z & = 4 \end{cases}$$

La somme des trois lignes donne : $0x + 0y + 0z = 3$ ce qui est impossible. Il n'y alors pas de solution.

Exercice 29

On considère $(S) \begin{cases} x + 2y - 4z = a \\ -x - y + 5z = b \\ 2x + 7y - 3z = c \end{cases}$ où $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$

1. Résoudre (S)
2. On pose $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 \\ -1 & -1 & 5 \\ 2 & 7 & -3 \end{pmatrix}$. En utilisant 1. montrer que A est inversible et calculer A^{-1}.

Correction Exercice 29

1. Système

On pose le système augmenté :

$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -4 & a \\ -1 & -1 & 5 & b \\ 2 & 7 & -3 & c \end{array}\right)$ On fait $L2 \leftarrow L2 + L1$ et $L3 \leftarrow L3 - 2L1$ $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -4 & a \\ 0 & 1 & 1 & a+b \\ 0 & 3 & 5 & c-2a \end{array}\right)$ $L3 \leftarrow L3 - 3L2$ $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -4 & a \\ 0 & 1 & 1 & a+b \\ 0 & 0 & 2 & c-5a-3b \end{array}\right)$

1. suite

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -4 & a \\ 0 & 1 & 1 & a+b \\ 0 & 0 & 2 & c-5a-3b \end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -4 & a \\ 0 & 2 & 2 & 2a+2b \\ 0 & 0 & 2 & c-5a-3b \end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -4 & a \\ 0 & 2 & 0 & 7a+5b-c \\ 0 & 0 & 2 & c-5a-3b \end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -16a-11b+3c \\ 0 & 2 & 0 & 7a+5b-c \\ 0 & 0 & 2 & 5a-3b+c \end{array}\right)$$

2. Inverse de A

Elle se lit directement dans le système augmenté précédent :

$A^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -32 & -22 & 6 \\ 7 & 5 & -1 \\ -5 & -3 & 1 \end{pmatrix}$

Exercice 31

Sans aucun calcul donner le déterminant des matrices suivantes (cf énoncé)

Correction Exercice 31

- $\det(I_3) = 1^3 = 1$
- $\det(M_1) = -\det(I_3) = -1$ (échange des colonnes 1 et 2).
- $\det(M_2) = 2 \times 1 \times 1 = 2$
- $\det(2I_3) = 2^3 \det(I_3) = 8$
- $\det(N_1) = 0$ (colonne nulle)
- $\det(N_2) = 0$ (deux colonnes égales)
- $\det(N_3) = 0$ (les colonnes sont liées : $C_3 = 2C_1$)
