L2S4 - Calcul matriciel

Correction des exercices 7, 8, 9, 10, 11 et 12

qkzk

2021/01/30

Correction Exercice 7

Il faut vérifier que $(AB)C = A(BC)$.

Il suffit de poser les calculs et on trouve les résultats suivants :

$$AB = \begin{pmatrix} -2 & 0 & -5 \\ -1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$(AB)C = \begin{pmatrix} 4 & -12 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$$

$$BC = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 3 & -5 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A(BC) = \begin{pmatrix} 4 & -12 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$$

Exercice 8

Déterminer toutes les matrices X de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ vérifiant :

1. $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$
2. $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

1. $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

On pose $X = \begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z & t \\ 2z & 2t \end{bmatrix}$

Donc $\begin{bmatrix} z & t \\ 2z & 2t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow z = t = 0$

et $X = \begin{bmatrix} x & y \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

On a l'exemple de deux matrices *non nulles* dont le produit vaut 0. On dit que ces matrices *divisent zéro.*

2. $\begin{pmatrix}1 & 1\\0 & 1\end{pmatrix} X = \begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}$

$\begin{bmatrix}1 & 1\\0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x & y\\z & t\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}x+z & y+t\\z & t\end{bmatrix}$

Donc $\begin{bmatrix}x+z & y+t\\z & t\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}$

et $\begin{cases}x+z=1\\y+t=0\\z=0\\t=1\end{cases}$ donc $\begin{cases}x=1\\y=-1\\z=0\\t=1\end{cases}$ et $X = \begin{pmatrix}1 & -1\\0 & 1\end{pmatrix}$

Dans le second cas, X est en fait *l'inverse* de $\begin{bmatrix}1 & 1\\0 & 1\end{bmatrix}$

Exercice 9

Résoudre dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ le système :

$$\begin{cases} X+Y & = \begin{pmatrix}-3 & 1\\-1 & 3\end{pmatrix}\\ X+2Y & = \begin{pmatrix}6 & 4\\5 & 3\end{pmatrix}\end{cases}$$

Correction Exercice 9

Notons A et B les deux matrices de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ des seconds membres.

On cherche alors à résoudre le système :

$(S) \Leftrightarrow \begin{cases} X+Y & = & A\\ X+2Y & = & B\end{cases}$

$(S) \Leftrightarrow \begin{cases} Y & = & B-A\\ X & = & A-Y = 2A-B\end{cases}$

Il vient donc $Y = \begin{bmatrix}9 & 3\\6 & 0\end{bmatrix}$ et $X = \begin{bmatrix}-12 & -2\\-7 & 3\end{bmatrix}$

Exercice 10

On considère $A = \begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\-1 & 1 & -3\\0 & -1 & 0\end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix}-1 & -1 & 1\\1 & 0 & -1\\3 & 1 & -2\end{pmatrix}$.

1. Calculer $AB, BA, (A+B)^2$ et $A^2+2AB+B^2$. Que remarquez-vous ?
2. Calculer ${}^t(AB)$ et ${}^tA \cdot {}^tB$

Correction Exercice 10

1. Calculer $AB, BA, (A+B)^2$ et $A^2+2AB+B^2$. Que remarquez-vous ?

$A \cdot B = \begin{pmatrix}3 & 0 & -2\\-7 & -2 & 4\\-1 & 0 & 1\end{pmatrix}$, $B \cdot A = \begin{pmatrix}0 & -3 & 2\\1 & 2 & 1\\2 & 6 & 0\end{pmatrix}$, $A+B = \begin{pmatrix}0 & 0 & 2\\0 & 1 & -4\\3 & 0 & -2\end{pmatrix}$, $(A+B)^2 = \begin{pmatrix}6 & 0 & -4\\12 & 1 & 4\\-6 & 0 & 10\end{pmatrix}$, $A^2 = \begin{pmatrix}0 & 1 & -2\\-2 & 3 & -4\\1 & -1 & 3\end{pmatrix}$, $B^2 = \begin{pmatrix}3 & 2 & -2\\-4 & -2 & 3\\-8 & -5 & 6\end{pmatrix}$, $A^2+2AB+B^2 = \begin{pmatrix}9 & 3 & -8\\-20 & -3 & 7\\-9 & -6 & 11\end{pmatrix}$

$AB \neq BA \Rightarrow$ pas d'identité remarquable ou de binôme de Newton.

2. Calculer ${}^t(AB)$ et ${}^tA \cdot^t B$

${}^tA = \begin{pmatrix} 3 & 11 & -1 \\ 0 & 4 & 0 \\ -2 & -8 & 1 \end{pmatrix}$, ${}^tB = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$, ${}^t(A \cdot B) \begin{pmatrix} -1 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix}$, ${}^tA \cdot^t B \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -3 & 2 & 6 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

On a *toujours* ${}^t(A \cdot B) =^t B \cdot^t A$ mais on s'arrête là car $AB \neq BA$

Exercice 11

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Déterminer A^n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Correction exercice 11

Déterminer A^n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $A^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ puis

$A^4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Et, pour tout $n \geq 4$, $A^n = A^4 \cdot A^{n-4} = O_3 \cdot A^{n-4} = O_4$

Comme $n \geq 4, n - 4 \geq 0$ et A^{n-4} est bien définie.

Remarques

Une matrice carrée $N \neq O$ telle que $N^p = O$ pour $p \in \mathbb{N}^*$ est dite nilpotente. C'est le cas de toute matrice triangulaire dont les coefficients diagonaux sont nuls.

Remarquons donc qu'on peut *diviser zéro* chez les matrices carrées...

Exercice 12

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 3 \\ -1 & -2 & -2 \end{pmatrix}$.

1. Calculer A^2
2. Déterminer la matrice B telle que $A^2 = A + B$
3. a) Démontrer que $AB = B$
   b) En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}^*$ on a $A^n = A + (n-1)B$

Correction Exercice 12

1. Calculer A^2

$A^2 = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 6 \\ 2 & 5 & 6 \\ -2 & -4 & -5 \end{pmatrix}$

2. Déterminer la matrice B telle que $A^2 = A + B$

$A^2 = A \cdot B \Leftrightarrow B = A^2 - A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ -1 & -2 & -3 \end{pmatrix}$

3. a) Démontrer que $AB = B$

On calcule AB et il vient B.

3. b) En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}^*$ on a $A^n = A + (n-1)B$

Nous allons faire un raisonnement par récurrence pour $n \in \mathbb{N}^*$

1. La propriété est vraie au rang $n = 1$: $A + 0B = A$.
2. Supposons qu'il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $A^n = A + (n-1)B$

   Alors, $A^{n+1} = A \cdot A^n = A(A + (n-1)B) = A^2 + (n-1)AB = A + B + (n-1)B = A + nB$

   La propriété est donc vraie au rang $n + 1$
3. D'après le principe de récurrence elle est vraie à tous les rangs $n \geq 1$.
