Devoir surveillé Calcul matriciel

(durée 2 heures)

Merci de noter sur votre copie le numéro de votre section

Avertissement : *On insiste sur la nécessité de fournir des arguments complets, rédigés de façon claire et ordonnée, pour justifier les réponses. Le barème donné a seulement une valeur indicative.*

Exercice 1. [4 points] On considère les matrices :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$$

1. Calculer le déterminant de chaque matrice. A et B sont-elles inversibles ? (justifier votre réponse)
2. Calculer le polynôme caractéristique de chaque matrice. A et B sont-elles diagonlisables ? (justifier votre réponse)

Exercice 2. [7 points]

1. Soient m un réel et A la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} m & 1 & 1 \\ 1 & m & m \\ 1 & 1 & m \end{pmatrix}.$$

On note $\det A$ le déterminant de A.

(a) Montrer que $\det A = (m-1)^2(m+1)$.

(b) Quelles sont les valeurs de m pour lesquelles A est inversible ? (justifier votre réponse)

(c) Calculer le rang de A suivant les valeurs de m.

2. Soit (S) le système d'équations :

$$\begin{cases} mx + y + z = 1 \\ x + my + mz = 1 \\ x + y + mz = m \end{cases}$$

(a) Quelles sont les valeurs de m pour lesquelles (S) est un système de Cramer ?

(b) Résoudre (S) dans le cas où $m = 0$.

(c) Résoudre (S) dans le cas où $m = 1$.

(d) Résoudre (S) dans le cas où $m = -1$.

Tourner la page SVP

Exercice 3. [9 points] On considère la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

On notera $P_A(\lambda)$ le polynôme caractéristique de A.

1. Montrer que $P_A(\lambda) = \lambda(1-\lambda)(\lambda+2)$.
2. Déterminer les valeurs propres de A ainsi que les vecteurs propres associés.
3. Soit $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$. Trouver une matrice P inversible telle que $A = PDP^{-1}$, où P^{-1} est la matrice inverse de P.
4. Calculer P^{-1}.
5. Calculer A^n pour tout entier $n \geq 1$.
6. On considère les suites (u_n), (v_n) et (w_n) définies par :
   $u_0 = v_0 = w_0 = 1$ et pour $n \geq 0$,

$$\begin{cases} u_{n+1} = u_n + v_n + w_n \\ v_{n+1} = u_n - v_n + w_n \\ w_{n+1} = -u_n + v_n - w_n \end{cases}$$

   Exprimer u_n, v_n et w_n en fonction de n.

—oooOooo—