Licence 2 – FaSEST – Calcul matriciel
Examen S4 –Section 1- Mai 2025 –
Durée 2h

Documents interdits. Calculatrice de type « collège » autorisée. Aucun brouillon ne sera corrigé, les résultats devront être justifiés.

Exercice 1 (4 points)

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

1) Déterminer A^{-1} par la méthode de Jordan-Gauss.
2) En déduire la résolution du système $\begin{cases} x+y+2z=3 \\ x+2y+z=1 \\ 2x+y+z=0 \end{cases}$

Exercice 2 (6 points)

On considère le système $\begin{cases} x+y-z=1 \\ 3x+y+mz=1 \\ x-2y+2z=m \end{cases}$ où m est un paramètre réel.

1) A quelle(s) condition(s) sur m, le système est-il de Cramer ?
2) Résoudre le système dans le cas où m = -1.
3) Résoudre le système grâce aux formules de Cramer lorsque m = 1.

Exercice 3 (10 points)

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

1) Démontrer que le polynôme caractéristique est P(X) = (X-2)²(X-1). Déduire les valeurs propres de A.
2) Déterminer les sous-espaces propres et vecteurs propres associés aux valeurs propres.
3) Justifier que la matrice est diagonalisable.
4) Préciser les matrices P et D telles que $A = PDP^{-1}$. Calculer P^{-1}.
5) Déterminer l'expression de A^n (expression complète en fonction de n).
6) BONUS (2 points)

Soit les suites $(U_n),(V_n)\ et\ (W_n)$ définies par $\begin{cases} U_{n+1} = U_n + V_n + W_n \\ V_{n+1} = -U_n + 3V_n + W_n \\ W_{n+1} = U_n - V_n + 3W_n \end{cases}$, $U_0 = V_0 = W_0 = 1$

En utilisant ce qui précède, déterminer l'expression de $U_n, V_n \; et \; W_n$ en fonction de n.