Correction DS – Calcul matriciel

Exercice 1 (10 pts)

1) $\boxed{2}$
0,25 (i) matrices de $\hat{m}$ dimension
0,25 (ii) pas de condition
0,75 (iii) nbre de colonnes de la 1ère = nbre de lignes de la 2è
0,75 (iii) ${}^tA\,{}^tB = {}^t(BA)$ nombre de colonnes de ${}^tA$ = nbre de lignes de ${}^tB$
donc ——— lignes de A = ——— colonnes de B.

$\boxed{2}$ 2) $M+N$ impossible, N^2 impossible (car $(2,3)\times(2,3)$!)
0,5 $M \in \mathcal{M}_{3,2}(\mathbb{R})$ $N \in \mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{R})$ donc MN possible. $2M$ possible.

0,75 $2M = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ 0,75 $MN = \begin{pmatrix} 4 & -3 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

$\boxed{2}$ 3) 0,5 ${}^tA = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

$A \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$	$A\,{}^tA = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = 2I$

1 $A \times \left(\frac{1}{2}{}^tA\right) = I$ donc A inversible d'inverse $\frac{1}{2}{}^tA$.

0,5 $\left(\frac{1}{2}A\right).{}^tA = I$ ——— ${}^tA$ ——— $\frac{1}{2}A$.

$\boxed{1,5}$ 4) $B^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

0,75 Donc $B^2 - 2B = -I$
$B(B-2I) = -1I$ donc $B(2I-B) = I$
B inversible d'inverse $2I - B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

0,75 $B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

$\boxed{2,5}$ 5) $CD = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = 2I = DC$ Donc $C \times \frac{1}{2}D = I$

1 0,75 Donc C inversible d'inverse $\frac{1}{2}D$

on a ${}^t(CD) = {}^tD\,{}^tC$ et ${}^t(2I) = 2\,{}^tI = 2I$

Donc ${}^tD\,{}^tC = 2I$ donc ${}^tC$ inversible d'inverse $\frac{1}{2}{}^tD$.

0,75 ${}^tC = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

Exercice 2 (4,5 pts)

$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

1) 0,5 $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ 2) 1,5 $N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $N^3 = 0_3$

$\forall k \geq 3 \quad N^k = N^{k-3} \times N^3 = N^{k-3} \times 0_3 = 0_3$

3) $2I_3$ et N commutent.

2,5 $M^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} N^k (2I_3)^{n-k} = \binom{n}{0}(2I_3)^n + \binom{n}{1} N (2I_3)^{n-1} + \binom{n}{2} N^2 (2I_3)^{n-2} + 0_3$

$\longrightarrow$

Donc $M^n = 2^n I_3 + n 2^{n-1} N + \frac{n(n-1)}{2} \times 2^{n-2} N^2$

$$M^n = \begin{pmatrix} 2^n & n2^{n-1} & n(n-1)2^{n-3} \\ 0 & 2^n & n2^{n-1} \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}$$

Exercice 3 (4 pts)

1) $\begin{cases} x - y + z = a \\ x + y - z = b \\ -x + y + z = c \end{cases}$ $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & a \\ 1 & 1 & -1 & b \\ -1 & 1 & 1 & c \end{array}\right)$

2

$$\underset{L_2+L_3}{\Longleftrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & a \\ 1 & 1 & -1 & b \\ 0 & 2 & 0 & c+b \end{array}\right) \underset{L_2-L_1}{\Longleftrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & a \\ 0 & 2 & -2 & b-a \\ 0 & 2 & 0 & c+b \end{array}\right)$$

$$\underset{L_2-L_3}{\Longleftrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & a \\ 0 & 0 & -2 & (b-a)-(c+b) \\ 0 & 2 & 0 & c+b \end{array}\right) \Longleftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & a \\ 0 & 0 & -2 & -a-c \\ 0 & 2 & 0 & c+b \end{array}\right)$$

$$\begin{cases} x = y - z + a = \frac{1}{2}b + \frac{1}{2}c - \frac{1}{2}a - \frac{1}{2}c + a \\ z = \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}c \\ y = \frac{1}{2}c + \frac{1}{2}b \end{cases} \qquad \begin{cases} x = \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b \\ y = \frac{1}{2}b + \frac{1}{2}c \\ z = \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}c \end{cases}$$

2 2) $AX = B \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \Leftrightarrow X = A^{-1}B$.

D'après 1) $A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}$ inversible donc $r(A) = 3$.

Exercice 4 (1,5 pts)

$$r(C) = r \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -3 \\ 0 & 2 & -3 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ L_2-L_1 \\ L_3-3L_1 \end{array} = r \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ L_3-L_2 \end{array} = 2 \neq 3$$

Echelonnée

donc C est non inversible.

Devoir surveillé Calcul matriciel - Sections 1 et 2

Samedi 17 février 2024

(durée 2 heures)

Merci d'indiquer le numéro de votre section

Avertissement : *On insiste sur la nécessité de fournir des arguments complets, rédigés de façon claire et ordonnée, pour justifier les réponses. Le barème donné a seulement une valeur indicative.*

Exercice 1. [10 points]

1. **[2 points]** Soient a un réel, A une matrice de taille $n \times m$ et B une matrice de taille $p \times q$. Donner les conditions (s'il y en a) pour effectuer les opérations suivantes :
   (i) La somme des matrices A et B : $A + B$;
   (ii) Le produit de la matrice A par le réel a : aA ;
   (iii) Le produit de la matrice A par la matrice B : AB ;
   (iv) Le produit de la matrice transposée de A par la matrice transposée de B : ${}^tA{}^tB$.

2. **[2 points]** Soient $M = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $N = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.
   Calculer, si possible, $M + N$, $2M$, MN et N^2.

3. **[2 points]** Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Donner la matrice transposée de A. Calculer le produit de la matrice A par sa transposée. En déduire que A est inversible et donner sa matrice inverse. Donner la matrice inverse de la transposée de A.

4. **[1,5 points]** Soit $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$. Montrer que $B^2 - 2B + I = 0$, où I est la matrice identité d'ordre 2. En déduire que B et inversible et donner son inverse.

5. **[2,5 points]** Soit $C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Calculer les produits CD et DC. En déduire que C est inversible et donner sa matrice inverse. Donner la matrice transposée de C, quelle est sa matrice inverse ?

Tourner la page SVP

Exercice 2. [4,5 points]
On considère la matrice :

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

1. **[0,5 point]** Trouver une matrice N telle que $M = 2I_3 + N$, où I_3 est la matrice identitée d'ordre 3.
2. **[1,5 points]** Calculer N^2, N^3 et en déduire la valeur de N^k pour tout entier $k \geq 4$.
3. **[2,5 points]** Appliquer la formule du binôme, en justifiant l'usage, pour calculer M^n pour tout entier $n \geq 1$.

Exercice 3. [4 points] On considère le système d'inconnues $x, y, z \in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} x - y + z = a \\ x + y - z = b \\ -x + y + z = c \end{cases}$$

où a, b et c sont des réels.

1. **[2 points]** Résoudre ce système.
2. **[2 points]** Ecrire ce système sous forme matricielle $AX = B$ où les matrices A, B et X sont à expliciter. En déduire que A est inversible et donner sa matrice inverse. Quel est le rang de la matrice A ? (justifier votre réponse)

Exercice 4. [1,5 points] Soit $C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ 3 & -1 & 3 \end{pmatrix}$.

Calculer le rang de cette matrice. C est-elle inversible ? (justifier votre réponse)

—oooOooo—