L2S4 - Calcul matriciel

Correction des exercices

qkzk

2021/01/28

Correction des exercices de TD de L2S4 ***Calcul Matriciel***

Exercices non corrigés

- 17
- 18
- 19
- 23 - question 2
- 29 - question 2
- 30
- 32
- 34
- 36
- 39
- 43
- 44
- 46
- 48

Généralités sur les matrices, opérations matricielles

Exercice 1

Écrire en extension la matrice $A = (a_{ij})$ de $\mathcal{M}_4$ définie pour tout $(i, j) \in [1..4]^2$ par

$$a_{ij} = \frac{1}{i + j - 1}$$

$A = (a_{ij})$ de $\mathcal{M}_4, \forall (i, j) \in [1..4]$ par $a_{ij} = \dfrac{1}{i + j - 1}$

$a[i, j]$: élément de A en ligne i et colonne j

Donc on remplit la matrice :

$$A = \begin{bmatrix} \frac{1}{1} & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \frac{1}{6} & \frac{1}{7} \end{bmatrix}$$

Exercice 2

Soit $A = (2^{(j-1)(k-1)})_{1 \leq j,k \leq n}$. Écrire A en extension pour $n = 3$

Soit $A = (2^{(j-1)(k-1)})_{1 \leq j,k \leq n}$. Écrire A en extension pour $n = 3$

$$A = \begin{bmatrix} 2^0 & 2^0 & 2^0 \\ 2^0 & 2^1 & 2^2 \\ 2^0 & 2^2 & 2^4 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 4 & 8 \end{bmatrix}$$

Exercice 3

Donner la taille des matrices suivantes, et indiquer celles qui sont échelonnées, échelonnées réduites.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} C = \text{(pas le courage)}$$

Correction exercice 3

- A est de taille 5×5
- A n'est pas échelonnée, ni réduite.
- B est de taille 3×5, elle est échelonnée mais pas réduite.
- C est de taille 5×10 (!) elle est échelonnée et réduite.

Exercice 4

Dans chacun des cas calculer $A+B, AB, BA$

1. $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} -2 & 4 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$
2. $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$
3. $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$

Correction Exercice 4

1. $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$**,** $B = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$

$A+B = \begin{pmatrix} 0 & 7 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

$AB = \begin{pmatrix} 5 & 11 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}$

$BA = \begin{pmatrix} -8 & -6 \\ 5 & 9 \end{pmatrix}$

2. $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$

$A+B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

$AB = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$BA = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

3. $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$

$A+B = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}$

$AB = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 9 & 12 \end{pmatrix}$

$BA = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 9 & 12 \end{pmatrix}$

Exercice 5

On pose :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} B = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 3 & 9 & 2 \end{pmatrix} C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Calculer si c'est possible $A \cdot B$ et $B \cdot A$
2. Calculer de deux manières différentes ${}^t(B \cdot C)$
3. Que peut-on en dire de la matrice ${}^tB \cdot B$?

1. Calculer si c'est possible $A \cdot B$ et $B \cdot A$

AB est défini $(2,2) \times (2,3)$ mais BA n'est pas déifinie $(2,3) \times (2,2)$

$AB = \begin{pmatrix} 11 & 32 & 13 \\ 19 & 55 & 24 \end{pmatrix}$

2. Calculer de deux manières différentes ${}^t(B \cdot C)$

$BC = \begin{pmatrix} -12 & 16 \\ -1 & 17 \end{pmatrix}$

${}^t(BC) = \begin{pmatrix} -12 & -1 \\ 16 & 17 \end{pmatrix}$

2. Calculer de deux manières différentes ${}^t(B \cdot C)$

${}^t(BC) = {}^tC \cdot^t B$

${}^tC = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

${}^tB = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 9 \\ 7 & 2 \end{pmatrix}$

${}^tC^tB = \begin{pmatrix} -12 & -1 \\ 16 & 17 \end{pmatrix}$

3. Que peut-on dire de la matrice ${}^tB \cdot B$?

Une matrice de cette forme est toujours symétrique :

${}^t({}^tB \cdot B) =^t B \cdot^t ({}^tB) =^t B \cdot B$

${}^tB = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 9 \\ 7 & 2 \end{pmatrix} B = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 3 & 9 & 2 \end{pmatrix}$

${}^tB^tB = \begin{pmatrix} 13 & 37 & 20 \\ 37 & 106 & 53 \\ 20 & 53 & 53 \end{pmatrix}$

Exercice 6

énoncé interminable... désolé... pas le courage

1. Combien le fleuriste a besoin de fleurs de chaque type ?

La démarche consiste à

- remarquer que les relations sont *linéaires* (pas de prix au carré !).
- noter A la matrice exprimant les quantités nécessaires :

  $A = \begin{pmatrix} 10 & 10 & 3 & 7 \\ 8 & 0 & 10 & 5 \\ 5 & 5 & 0 & 10 \end{pmatrix}$
- Faire très attention à l'orientation de la matrice. Les types de fleurs sont en colonne !
- noter C (*commande*) la matrice ligne exprimant la commande :

  $C = \begin{pmatrix} 51 & 48 & 37 \end{pmatrix}$

Il lui faut, pour les roses blanches : $51 \times 10 + 48 \times 8 + 37 \times 5 = 1079$ roses blanches

On peut donc généraliser et les quantités nécessaires sont données par $C \cdot A$:

$C \cdot A = \begin{pmatrix} 51 & 48 & 37 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 10 & 10 & 3 & 7 \\ 8 & 0 & 10 & 5 \\ 5 & 5 & 0 & 10 \end{pmatrix}$

$C \cdot A = \begin{pmatrix} 1079 & 695 & 633 & 967 \end{pmatrix}$

2. Quel est le prix de la commande ?

Cette fois on note P la matrice colonne :

$P = \begin{pmatrix} 23 \\ 19 \\ 15 \end{pmatrix}$

Le prix de la commande est donné par :

$C \cdot P = \begin{pmatrix} 2640 \end{pmatrix}$

Ce qui donne, en détaillant : $51 \times 23 + 48 \times 19 + 37 \times 15 = 2640€$

Exercice 7

Vérifier l'associativité du produit matriciel avec :

$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ -2 & -1 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

Correction Exercice 7

Il faut vérifier que $(AB)C = A(BC)$.

Il suffit de poser les calculs et on trouve les résultats suivants :

$$AB = \begin{pmatrix} -2 & 0 & -5 \\ -1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$(AB)C = \begin{pmatrix} 4 & -12 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$$

$$BC = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 3 & -5 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A(BC) = \begin{pmatrix} 4 & -12 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$$

Exercice 8

Déterminer toutes les matrices X de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ vérifiant :

1. $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$
2. $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

1. $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

On pose $X = \begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z & t \\ 2z & 2t \end{bmatrix}$

Donc $\begin{bmatrix} z & t \\ 2z & 2t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow z = t = 0$

et $X = \begin{bmatrix} x & y \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

On a l'exemple de deux matrices *non nulles* dont le produit vaut 0. On dit que ces matrices *divisent zéro*.

2. $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x+z & y+t \\ z & t \end{bmatrix}$

Donc $\begin{bmatrix} x+z & y+t \\ z & t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

et $\left\{ \begin{array}{r} x+z=1 \\ y+t=0 \\ z=0 \\ t=1 \end{array} \right.$ donc $\left\{ \begin{array}{r} x=1 \\ y=-1 \\ z=0 \\ t=1 \end{array} \right.$ et $X = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Dans le second cas, X est en fait *l'inverse* de $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

Exercice 9

Résoudre dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ le système :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} X+Y & = & \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \\ X+2Y & = & \begin{pmatrix} 6 & 4 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} \end{array} \right.$$

Correction Exercice 9

Notons A et B les deux matrices de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ des seconds membres.

On cherche alors à résoudre le système :

$(S) \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} X+Y & = & A \\ X+2Y & = & B \end{array} \right.$

$(S) \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} Y & = & B-A \\ X & = & A-Y = 2A-B \end{array} \right.$

Il vient donc $Y = \begin{bmatrix} 9 & 3 \\ 6 & 0 \end{bmatrix}$ et $X = \begin{bmatrix} -12 & -2 \\ -7 & 3 \end{bmatrix}$

Exercice 10

On considère $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -3 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 3 & 1 & -2 \end{pmatrix}$.

1. Calculer $AB, BA, (A+B)^2$ et $A^2 + 2AB + B^2$. Que remarquez-vous ?
2. Calculer ${}^t(AB)$ et ${}^tA \cdot {}^tB$

Correction Exercice 10

1. Calculer $AB, BA, (A+B)^2$ et $A^2 + 2AB + B^2$. Que remarquez-vous ?

$A \cdot B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -2 \\ -7 & -2 & 4 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & -3 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 6 & 0 \end{pmatrix}$, $A + B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -4 \\ 3 & 0 & -2 \end{pmatrix}$, $(A+B)^2 = \begin{pmatrix} 6 & 0 & -4 \\ 12 & 1 & 4 \\ -6 & 0 & 10 \end{pmatrix}$, $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ -2 & 3 & -4 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$, $B^2 = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 \\ -4 & -2 & 3 \\ -8 & -5 & 6 \end{pmatrix}$, $A^2 + 2AB + B^2 = \begin{pmatrix} 9 & 3 & -8 \\ -20 & -3 & 7 \\ -9 & -6 & 11 \end{pmatrix}$

$AB \neq BA \Rightarrow$ pas d'identité remarquable ou de binôme de Newton.

2. Calculer ${}^t(AB)$ et ${}^tA \cdot {}^tB$

${}^tA = \begin{pmatrix} 3 & 11 & -1 \\ 0 & 4 & 0 \\ -2 & -8 & 1 \end{pmatrix}$, ${}^tB = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$, ${}^t(A \cdot B) \begin{pmatrix} -1 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix}$, ${}^tA \cdot {}^tB \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -3 & 2 & 6 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

On a *toujours* ${}^t(A \cdot B) = {}^tB \cdot {}^tA$ mais on s'arrête là car $AB \neq BA$

Exercice 11

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Déterminer A^n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Correction exercice 11

Déterminer A^n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $A^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ puis

$A^4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Et, pour tout $n \geq 4$, $A^n = A^4 \cdot A^{n-4} = O_3 \cdot A^{n-4} = O_4$

Comme $n \geq 4, n - 4 \geq 0$ et A^{n-4} est bien définie.

Remarques

Une matrice carrée $N \neq O$ telle que $N^p = O$ pour $p \in \mathbb{N}^*$ est dite nilpotente. C'est le cas de toute matrice triangulaire dont les coefficients diagonaux sont nuls.

Remarquons donc qu'on peut *diviser zéro* chez les matrices carrées...

Exercice 12

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 3 \\ -1 & -2 & -2 \end{pmatrix}$.

1. Calculer A^2
2. Déterminer la matrice B telle que $A^2 = A + B$
3. a) Démontrer que $AB = B$

   b) En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}^*$ on a $A^n = A + (n-1)B$

Correction Exercice 12

1. Calculer A^2

$A^2 = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 6 \\ 2 & 5 & 6 \\ -2 & -4 & -5 \end{pmatrix}$

2. Déterminer la matrice B telle que $A^2 = A + B$

$A^2 = A \cdot B \Leftrightarrow B = A^2 - A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ -1 & -2 & -3 \end{pmatrix}$

3. a) Démontrer que $AB = B$

On calcule AB et il vient B.

3. b) En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}^*$ on a $A^n = A + (n-1)B$

Nous allons faire un raisonnement par récurrence pour $n \in \mathbb{N}^*$

1. La propriété est vraie au rang $n = 1$: $A + 0B = A$.
2. Supposons qu'il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $A^n = A + (n-1)B$

   Alors, $A^{n+1} = A \cdot A^n = A(A + (n-1)B) = A^2 + (n-1)AB = A + B + (n-1)B = A + nB$

   La propriété est donc vraie au rang $n + 1$
3. D'après le principe de récurrence elle est vraie à tous les rangs $n \geq 1$.

Exercice 13

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Calculer A^2 et A^3. Que remarquez-vous ?
2. Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, conjecturer l'expression de A^n en fonction de la matrice A.
3. Vérifier cette conjecture grâce à une récurrence.

Correction Exercice 13

1. Calculer A^2 et A^3. Que remarquez-vous ?

On obtient :

$A^2 = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 4 \\ -2 & -2 & -2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} = 2A$

et

$A^3 = \begin{pmatrix} 8 & 8 & 8 \\ -4 & -4 & -4 \\ 4 & 4 & 4 \end{pmatrix} = 2^2 A$

2. Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, conjecturer l'expression de A^n en fonction de la matrice A.

On conjecture que $A^n = 2^{n-1}A, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$.

3. Vérifier cette conjecture grâce à une récurrence.

Prouvons le par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$.

Pour $n = 1$, la propriété est vraie.

Supposons qu'il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que :

$$A^n = 2^{n-1}A$$

Alors,

$$A^{n+1} = A^n \times A = 2^{n-1}A^2 = 2^{n-1} \times 2A = 2^n A$$

Et, d'après le principe de récurrence, la propriété est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}g^*$.

Exercice 14

On considère la matrice : $A = \begin{pmatrix} \alpha & 1 & 0 \\ 0 & \alpha & 1 \\ 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix}$, α désignant un paramètre réel donné.

1. Calculer A^2 puis A^3.
2. a) Trouver une matrice B telle que $A = \alpha I_3 + B$
   b) Calculer B^2 et B^3. En déduire $B^k, \forall k \geq 3$.
3. En déduire l'expression de A^n en fonction de n.

Correction Exercice 14

1. Calculer A^2 puis A^3.

$$A^2 = \begin{pmatrix} \alpha^2 & 2\alpha & 1 \\ 0 & \alpha^2 & 2\alpha \\ 0 & 0 & \alpha^2 \end{pmatrix}$$

et

$$A^3 = \begin{pmatrix} \alpha^3 & 3\alpha^2 & 3\alpha \\ 0 & \alpha^3 & 3\alpha^2 \\ 0 & 0 & \alpha^3 \end{pmatrix}$$

2. a) Trouver une matrice B telle que $A = \alpha I_3 + B$

On pose $B = A - \alpha I_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

2. b) Calculer B^2 et B^3. En déduire $B^k, \forall k \geq 3$.

Il vient :

$$B^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

puis

$$B^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

On en déduit que pour $k \geq 3$, $B^k = B^{k-3} \times B^3 = O_3$

3. En déduire l'expression de A^n en fonction de n.

On applique le binôme de Newton pour αI_3 et B^n qui commutent.

$A^n = (\alpha I_3 + B)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (\alpha I_3)^{n-k} B^k$

Or, on sait que $B^k = 0_3$ pour $k \geq 3$ donc $A^n = \sum_{k=0}^{2} \binom{n}{k} (\alpha I_3)^{n-k} B^k = \alpha^n I_3 + n\alpha^{n-1} B + \dfrac{n(n-1)}{2} \alpha^{n-2} B^2$.

On a utilisé : $B^0 = I_3$, $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$, $\binom{n}{1} = \binom{n}{n-1} = n$, $\binom{n}{2} = \binom{n}{n-2} = \dfrac{n(n-1)}{2}$.

Donc $A^n = \begin{pmatrix} \alpha^n & n\alpha^{n-1} & \frac{n(n-1)}{2}\alpha^{n-2} \\ 0 & \alpha^n & n\alpha^{n-1} \\ 0 & 0 & \alpha^n \end{pmatrix}$

Exercice 15

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 1 & 1 & b \\ -\dfrac{1}{2} & -\dfrac{1}{2} & c \end{pmatrix}$, où a, b, c sont des nombres réels.

1. Déterminer a, b, c pour que A^2 soit la matrice nulle.
2. On considère la matrice $M = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 4 \\ -\dfrac{1}{2} & -\dfrac{1}{2} & -1 \end{pmatrix}$.

   On veut calculer M^n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

   a. Trouver P telle que $M = P + I_3$

   b. Par récurrence :

      i. Exprimer M^2 et M^3 en fonction de I_3 et P

      ii. Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $M^n = I_3 + nP$

   c. Retrouver ce résultat avec la formule du binôme de Newton.

Correction Exercice 15

3. On pose $S_n = M + \cdots + M^n$, avec $n \in \mathbb{N}^*$.

   Exprimer S_n en fonction de n. $\left(\text{Rappel : } 1 + \cdots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}\right)$

1. Déterminer a, b, c pour que A^2 soit la matrice nulle.

$$A^2 = \begin{pmatrix} 2 - \frac{a}{2} & 2 - \frac{a}{2} & a + b + ac \\ 2 - \frac{b}{2} & 2 - \frac{b}{2} & a + b + bc \\ -1 - \frac{c}{2} & -1 - \frac{c}{2} & c^2 - \frac{a+b}{2} \end{pmatrix}$$

Donc $A^2 = O_3 \Rightarrow a = 4, b = 4$ et $c = -2$ (première colonne). On vérifie immédiatement que ces paramètres fonctionnent dans tous les coefficients.

2. a. Trouver P telle que $M = P + I_3$

$P = M - I_3$ donc P est la solution obtenue à la question précédente (surprise).

2.b.i. Exprimer M^2 et M^3 en fonction de I_3 et P

I_3 commute avec toutes les matrices carrée de taille 3 donc on peut appliquer les identités remarquables.

Il vient $M^2 = (I_3 + P)^2 = I_3^2 + 2I_3P + P^2 = I_3 + 2P$, car $P^2 = O_3$

puis $M^3 = M \times M^2 = (I_3 + P)(I_3 + 2P) = (I_3 + 3P + P^2) = I_3 + 3P$

2.b.ii. Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $M^n = I_3 + nP$

Prouvons ce résultat par récurrence. On a déjà initialisé aux rangs 1, 2 et 3.

Supposons qu'il existe un entier naturel non nul n tel que $M^n = I + nP$,

alors $M^{n+1} = M \times M^n = (I_3 + P)(I_3 + nP) = I_3^2 + (n+1)P + nP^2 = I_3 + (n+1)P$

2.c. Retrouver ce résultat avec la formule du binôme de Newton.

On applique le binôme de Newton avec I_3 et P qui commutent :

$M^n = (I_3 + P)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (I_3)^{n-k} P^k = \sum_{k=0}^{1} \binom{n}{k} (I_3)^{n-k} P^k = I_3 + nP$

car $P^k = O_3$ si $k \geq 2$ et $\binom{n}{1} = n$.

3. Exprimer S_n en fonction de n.

$S_n = (I_3 + P) + (I_3 + 2P) + \cdots + (I_3 + nP) = nI_3 + (1 + 2 + \cdots + n)P = nI_3 + \dfrac{n(n+1)}{2}P.$

On a utilisé l'indication : $1 + 2 + \cdots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$.

Exercice 16

Voir énoncé

Correction Exercice 16

1. $M^2(a, b)$

$$M(a,b)^2 = \begin{pmatrix} a+b & b \\ -b & a-b \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} (a+b)^2 - b^2 & b(a+b) + b(a-b) \\ -b(a+b) - b(a-b) & -b^2 + (a-b)^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 + 2ab & 2ab \\ -2ab & a^2 - 2ab \end{pmatrix}$$

2. a) B tq $M = aI_2 + bB$

$B = M(a,b) - aI_2 = \begin{pmatrix} b & b \\ -b & -b \end{pmatrix}$

2. b) B^2

$B^2 = O_2$ donc $B^k = O_2, \forall k \geq 2$

2. c) $M^n(a,b)$ avec le binôme de Newton

aI_2 commute, comme I_2 avec toute matrice carrée de taille 2 donc avec B.

$$\forall n > 0, M^n(a,b) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} I_2 B^k$$
$$M^n(a,b) = \sum_{k=0}^{1} \binom{n}{k} a^{n-k} B^k$$
$$M^n(a,b) = a^n I_2 + na^{n-1} bB$$

$$M^n(a,b) = \begin{pmatrix} a^n + na^{n-1}b & na^{n-1}b \\ -na^{n-1}b & a^n - na^{n-1}b \end{pmatrix}$$

2. d) Toujours valable pour $n = 0$?

Oui. $M^0(a,b) = I_2$

3. a) $X_{n+1} = MX_n$

$U_{n+1} = 3U_n + 2V_n$ et $V_{n+1} = -2U_n - V_n$

$X_{n+1} = \begin{pmatrix} 3U_n + 2V_n \\ -2U_n - V_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_n \\ V_n \end{pmatrix} = M(3,2)X_n$

Cela fonctionne pour $M = M(3,2)$

3. b) $X_n = M^n X_0$

Par récurrence. Le résultat est vrai au rang 1.

Supposons qu'il existe un naturel n tel que $X_n = M^n X_0$ alors $X_{n+1} = M \times M^n X_0 = M^{n+1} X_0$

Ce qui prouve le résultat pour tout n.

3. c) U_n et V_n en fonction de n.

On a $M^n = \begin{pmatrix} 1+2n & 2n \\ -2n & 1-2n \end{pmatrix}$

Matrices inversibles et rang d'une matrice

Exercice 17

à préparer

Exercice 18

à préparer

Exercice 19

à préparer

Exercice 20

Soient A et B deux matrices carrées $n \times n$ telles que $AB = A + I_n$.

Montrer que A est inversible et déterminer son inverse en fonction de B

Correction Exercice 20

$AB = A + I_n, A, B, I_n \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Mq A est inversible et déterminer son inverse en fonction de B

$AB = A + I_n \Leftrightarrow AB - A = I_n \Leftrightarrow A(B - I_n) = I_n$

Donc A est inversible (il existe une matrice C telle que $AC = I_n$) et son inverse est $B - I_n$.

Exercice 21

Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Calculer A^2 et vérifier que $A^2 = A + 2I_3$, où I_3 est la matrice identité de taille 3.
2. En déduire que A est inversible et calculer son inverse.

Correction Exercice 21

1. Calculer A^2 et vérifier que $A^2 = A + 2I_3$, où I_3 est la matrice identité de taille 3.

$A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

Et $A - A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

Donc $A^2 = A + 2I_3$

2. En déduire que A est inversible et calculer son inverse.

$A^2 = A + 2I_3$ donc $A^2 - A = I_3$ et $\dfrac{1}{2}(A^2 - A) = I_3$

Aussi $A \times \frac{1}{2}(A - I_3) = I_3$

A est inversible et son inverse est $\dfrac{1}{2}(A - I_3) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

Exercice 22

On considère la matrice $P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

1. Calculer P^2, P^3 puis $P^3 - 2P^2 - 8P$.
2. En déduire que la matrice P est inversible et déterminer P^{-1}.

Correction Exercice 22

1. Calculer P^2, P^3 puis $P3 - 2P^2 - 8P$.

On trouve $P^2 = \left(\begin{array}{ccc} 7 & 0 & 2 \\ 0 & 8 & 1 \\ 3 & 1 & 5 \end{array}\right)$ $P^3 = \left(\begin{array}{ccc} 7 & 16 & 4 \\ 24 & -7 & 10 \\ 6 & 10 & 11 \end{array}\right)$

On remplace et $P^3 - 2P^2 - 8P = -15I_3$.

2. En déduire que la matrice P est inversible et déterminer P^{-1}.

On factorise P dans l'égalité précédente et $P(P^2 - 2P - 8I_3) = -15I_3$ donc

$P \times \frac{-1}{15}(P^2 - 2P - 8I_3) = I_3$

Donc P est inversible et $P^{-1} = \frac{-1}{15}(P^2 - 2P - 8I_3)$

Détails

$$P^2 = \begin{pmatrix} 7 & 0 & 2 \\ 0 & 8 & 1 \\ 3 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

$$P^3 = \begin{pmatrix} 7 & 16 & 4 \\ 24 & -7 & 10 \\ 6 & 10 & 11 \end{pmatrix}$$

$$P^{-1} = \frac{-1}{15}\begin{pmatrix} -3 & -4 & 2 \\ -6 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & -7 \end{pmatrix}$$

Exercice 23

Déterminer l'inverse de la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \\ 4 & 1 & 8 \end{pmatrix}$

Question 2 à préparer

Correction Exercice 23

Inverse de A

Beaucoup d'approches sont possibles : résolution d'un système 3×3 par pivot de Gauss, Réduction de Gauss-Jordan (la même chose écrite autrement), cofacteurs, formule explicite en 3×3.

- La formule est indigeste. Je l'ai apprise une fois dans ma vie, juste avant qu'on ne me la demande. Je l'ai oubliée aussitôt.
- Les cofacteurs sont faciles mais sujets à beaucoup d'étourderies et nous n'avons pas encore vu le déterminant.
- Utilisons donc une réduction... de Gauss-Jordan.

On génère la matrice augmentée $[A|I]$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} (1) & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & 8 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -4 & 0 & 1 \end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & (1) & 0 & -4 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & -2 & 1 & 0 \end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -4 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -6 & 1 & 1 \end{array}\right) \Leftrightarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -4 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & (1) & 6 & -1 & -1 \end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -11 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -4 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 6 & -1 & -1 \end{array}\right)$$

Conclusion

A est inversible et $A^{-1} = \begin{pmatrix} -11 & 2 & 2 \\ -4 & 0 & 1 \\ 6 & -1 & -1 \end{pmatrix}$

Je vous recommande donc d'utiliser cette méthode pour inverser les matrices de taille supérieure ou égale à 3. Pour la taille 2, utilisez la formule.

Systèmes linéaires

Exercice 24

Résoudre le système suivant d'inconnues x, y et z :

$$\begin{cases} x+3y+5z &= 22 \\ -x+2y+3z &= 12 \\ -12x+y-z &= -13 \end{cases}$$

Correction Exercice 24 question 1

Résoudre $\begin{cases} x+3y+5z &= 22 \\ -x+2y+3z &= 12 \\ -12x+y-z &= -13 \end{cases}$

Il faut parfois avoir beaucoup de confiance en soi... ici tout se simplifie dans les moments critiques (aucun moyen de le deviner, je vous le dis).

$$\begin{cases} x+3y+5z &= 22 \\ -x+2y+3z &= 12 \\ -12x+y-z &= -13 \end{cases}$$

$L_1 \leftarrow L_1 + L_2; L_3 \leftarrow L_3 + 12L_1$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+3y+5z = 22 \\ 5y+8z = 34 \\ 37y+59z = 251 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x+3y+5z = 22 \\ 5y+8z = 34 \\ 37y+59z = 251 \end{cases}$$

$L_3 \leftarrow 5L_3 - 37L_2$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+3y+5z = 22 \\ 5y+8z = 34 \\ -z = -3 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \begin{cases} x+3y+5z = 22 \\ 5y+8z = 34 \\ z = 3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+3y+5z = 22 \\ 5y = 34 - 8 \times 2 = 10 \\ z = 3 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \begin{cases} x = -3y - 5z + 22 \\ y = 2 \\ z = 3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \\ z = 3 \end{cases}$$

Exercice 25

énoncé trop long

Correction Exercice 25

Nombre d'employés, techniciens, cadres ?

On note x le nombre d'employés, y le nombre de techniciens et z celui des cadres.

- Personnes $\Leftrightarrow x+y+z=60$
- Salaires : $1500x+2600y+4200z=114\,000$
- Augmentations : $1.064\times 1500x+1.045\times 2600y+1.045\times 4200z=1.056\times 114\,000$
- Différence entre salaires augmentés et salaires de départ : $0.064\times 1500x+0.045\times 2600y+0.045\times 4200z=0.056\times 114\,000$

système

$$\begin{cases} x+y+z=60 \\ 15x+26y+42z=1140 \\ 96x+117y+189z=6384 \end{cases}$$

L_3 se simplifie par 3.

$$\begin{cases} x+y+z=60 \\ 15x+26y+42z=1140 \\ 32x+39y+63z=2128 \end{cases}$$

$L_3 \leftarrow L_3-2L_2$

$$\begin{cases} x+y+z=60 \\ 15x+26y+42z=1140 \\ 2x-13y-21z=-152 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x+y+z=60 \\ 15x+26y+42z=1140 \\ 2x-13y-21z=-152 \end{cases}$$

$L_2 \leftarrow L_2-15L_1; L_3 \leftarrow L_3-2L_1 \qquad L_3 \leftarrow 15L_2+11L_3$

$$\begin{cases} x+y+z=60 \\ 11y+27z=240 \\ -15y-23z=-272 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x+y+z=60 \\ 11y=-27z+240 \\ 152z=608 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=-y-z+60 \\ 11y=132 \\ z=4 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \begin{cases} x=44 \\ y=12 \\ z=4 \end{cases}$$

Exercice 26

Résoudre (S) en discutant selon les valeurs du paramètre a :

$$(S) \Leftrightarrow \begin{cases} ax+\ \ y+\ \ z=1 \\ \ \ x+ay+\ \ z=a \\ \ \ x+\ \ y+az=a^2 \end{cases}.$$

Correction Exercice 26

$$(S) \Leftrightarrow \begin{cases} ax+\ \ y+\ \ z=1 \\ \ \ x+ay+\ \ z=a \\ \ \ x+\ \ y+az=a^2 \end{cases}.$$

Avant de se lancer il faut décider d'un pivot.

La meilleure approche est d'échanger les lignes 1 et 2 : z, y, x

$$(S) \Leftrightarrow \begin{cases} x + ay + z = a \\ ax + y + z = 1 \\ x + y + az = a^2 \end{cases}.$$

26.2

On réalise les opérations suivantes :

$L_2 \leftarrow L_2 - aL_1, L_3 \leftarrow L_3 - L_1$. Il vient :

$$(S) \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} x + ay + z & = & a \\ (1-a^2)y + (1-a)z & = & 1 - a^2 \\ (1-a)y + (a-1)z & = & a^2 - a \end{array} \right.$$

Supposons $a \neq 1$ afin de diviser par $1 - a$. Nous devrons traiter ce cas $a = 1$ plus tard.

On divise les secondes et troisième ligne par $1 - a$.

26.3

Remarquons que $1 - a^2 = (1-a)(1+a)$ et $a^2 - a = a(a-1) = -a(1-a)$. Il vient :

$$\text{Si } a \neq 1, (S) \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} x + ay + z & = & a \\ (1+a)y + z & = & 1 + a \\ y - z & = & -a \end{array} \right.$$

Dans ce système on fait l'opération $L_3 \leftarrow L_2 + L_3$

$$\text{Si } a \neq 1, (S) \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} x + ay + z & = & a \\ (1+a)y + z & = & 1 + a \\ (2+a)y & = & 1 \end{array} \right.$$

26.4

On suppose de plus que $a \neq -2$ et alors

$$\text{Si } a \neq 1 \text{ et } a \neq -2, (S) \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} y & = & \frac{1}{2+a} \\ z & = & y + a \\ x & = & a - ay - az \end{array} \right.$$

$$\text{Si } a \neq 1 \text{ et } a \neq -2, (S) \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} x & = & \frac{-a-1}{2+a} \\ y & = & \frac{1}{2+a} \\ z & = & \frac{1+2a+a^2}{2+a} \end{array} \right.$$

On vérifie aisément que cette solution fonctionne dans le premier système.

26.5

Il reste à traiter les cas $a = 1$ et $a = -2$.

Si $a = 1$ les trois lignes sont identiques : $x + y + z = 1$. On obtient un plan de solutions dans l'espace.

Si $a = -2$ le système s'écrit :

$$(S) \Leftrightarrow \begin{cases} -2x + y + z = 1 \\ x - 2y + z = -2 \\ x + y - 2z = 4 \end{cases}$$

La somme des trois lignes donne : $0x + 0y + 0z = 3$ ce qui est impossible. Il n'y alors pas de solution.

Exercice 27

Résoudre les systèmes suivants :

1.
$$(S) : \begin{cases} x+2y+2z=2 \\ 3x-2y-z=5 \\ 2x-5y+3z=-4 \\ x+4y+6z=0 \end{cases}$$

2.
$$(S) : \begin{cases} x+2y-z+3w=3 \\ 2x+4y+4z+3w=9 \\ 3x+6y-z+8w=10 \end{cases}$$

Manque la question 3

27.1

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 3 & -2 & -1 & 5 \\ 2 & -5 & 3 & -4 \\ 1 & 4 & 6 & 0 \end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & -8 & -7 & -1 \\ 0 & -9 & -1 & -8 \\ 0 & 2 & 4 & -2 \end{array}\right)$$

$$\Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & -8 & -7 & -1 \\ 0 & -9 & -1 & -8 \\ 0 & 2 & 4 & -2 \end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 8 & 7 & 1 \\ 0 & 9 & 1 & 8 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \end{array}\right)$$

$$\Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -9 & 9 \\ 0 & 0 & -17 & 17 \end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right)$$

27.1 fin

$$\Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right)$$

Les solutions sont $x=2, y=1, z=-1$

27.2

2.
$$(S) : \begin{cases} x+2y-z+3w=3 \\ 2x+4y+4z+3w=9 \\ 3x+6y-z+8w=10 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 3 & 3 \\ 2 & 4 & 4 & 3 & 9 \\ 3 & 6 & -1 & 8 & 10 \end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 6 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 4 \end{array}\right)$$

$$\Leftrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 1 \end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & -3 \end{array}\right)$$

27.2 fin

$$\Leftrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & -3 \end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$$(S) : \begin{cases} x = 1 - 2y \\ y \in \mathbb{R} \\ z = 1 \\ w = 1 \end{cases}$$

Application au calcul de l'inverse d'une matrice

Exercice 28

On considère la matrice $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & -3 \end{pmatrix}$.

1. Calculer B^2 En déduire que B est inversible et préciser B^{-1}.
2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ le systeme :

$$\begin{cases} x + 2y - 2z = 1 \\ 2x + y - 2z = 3 \\ 2x + 2y - 3z = 4 \end{cases}$$

Correction Exercice 28

1. Calculer B^2 En déduire que B est inversible et préciser B^{-1}.

On obtient $B^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I^2$

Donc B est inversible et $B^{-1} = B$.

2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ le systeme : $\begin{cases} x + 2y - 2z = 1 \\ 2x + y - 2z = 3 \\ 2x + 2y - 3z = 4 \end{cases}$

Ce système est équivalent à $BX = C$ avec $C =^t (1, 3, 4)$ donc, en multipliant par l'inverse de B on obtient $B^2X = BC$ soit $X =^t (-1, -3, -4)$

Exercice 29

On considère $(S) \begin{cases} x + 2y - 4z = a \\ -x - y + 5z = b \\ 2x + 7y - 3z = c \end{cases}$ où $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$

1. Résoudre (S)
2. On pose $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 \\ -1 & -1 & 5 \\ 2 & 7 & -3 \end{pmatrix}$. En utilisant 1. montrer que A est inversible et calculer A^{-1}.

Correction Exercice 29

1. Système

On pose le système augmenté :

$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -4 & a \\ -1 & -1 & 5 & b \\ 2 & 7 & -3 & c \end{array}\right)$ On fait $L2 \leftarrow L2 + L1$ et $L3 \leftarrow L3 - 2L1$ $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -4 & a \\ 0 & 1 & 1 & a+b \\ 0 & 3 & 5 & c-2a \end{array}\right)$ $L3 \leftarrow L3 - 3L2$ $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -4 & a \\ 0 & 1 & 1 & a+b \\ 0 & 0 & 2 & c-5a-3b \end{array}\right)$

1. suite

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -4 & a \\ 0 & 1 & 1 & a+b \\ 0 & 0 & 2 & c-5a-3b \end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -4 & a \\ 0 & 2 & 2 & 2a+2b \\ 0 & 0 & 2 & c-5a-3b \end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -4 & a \\ 0 & 2 & 0 & 7a+5b-c \\ 0 & 0 & 2 & c-5a-3b \end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -16a-11b+3c \\ 0 & 2 & 0 & 7a+5b-c \\ 0 & 0 & 2 & 5a-3b+c \end{array}\right)$$

donc $A^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -32 & -22 & 6 \\ 7 & 5 & -1 \\ -5 & -3 & 1 \end{pmatrix}$

Manque la question 2

Exercice 30

à préparer

Déterminant

Exercice 31

Sans aucun calcul donner le déterminant des matrices suivantes (cf énoncé)

Correction Exercice 31

- $\det(I_3) = 1^3 = 1$
- $\det(M_1) = -\det(I_3) = -1$ (échange des colonnes 1 et 2).
- $\det(M_2) = 2 \times 1 \times 1 = 2$
- $\det(2I_3) = 2^3 \det(I_3) = 8$
- $\det(N_1) = 0$ (colonne nulle)
- $\det(N_2) = 0$ (deux colonnes égales)
- $\det(N_3) = 0$ (les colonnes sont liées : $C_3 = 2C_1$)

Exercice 32

à préparer

Exercice 33

Correction Exercice 33

Correction A

On effectue la combinaison linéaire $C_2 \leftarrow C_2 + 2C_1 + 2C_3$ et on développe par rapport à C_2

$$det(A) = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{3}{4} & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \frac{2}{3} \begin{vmatrix} \frac{3}{4} & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = \frac{2}{3} \times \frac{7}{4} = \frac{7}{6}$$

Correction B.

On effectue la combinaison linéaire $L_2 \leftarrow L_1 - L_3$ et on développe par rapport à C_2

$$det(B) = \begin{vmatrix} 3 & 0 & -4 \\ 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -1 \times \begin{vmatrix} 3 & -4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -10$$

Correction C

On effectue les combinaisons linéaires $L_1 \leftarrow L_1 - 4L_3$ et $L_2 \leftarrow L_2 - L_3$

on développe par rapport à C_2

$$det(C) = \begin{vmatrix} -6 & 0 & -12 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -1 \times \begin{vmatrix} -6 & -12 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -1 \times 0 = 0$$

Exercice 34

à préparer

Exercice 35

$$A = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & 1 & a \end{pmatrix}$$

1. Montrer que $det(A) = (a+3)(a-1)^3$
2. Pour quelle valeur du paramètre a, A est-elle inversible ?

Correction Exercice 35

1. Montrer que $det(A) = (a+3)(a-1)^3$

$$det(A) = \begin{vmatrix} a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & 1 & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a+3 & a+3 & a+3 & a+3 \\ 1 & a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & 1 & a \end{vmatrix}$$

$$= (a+3)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & 1 & a \end{vmatrix} = (a+3)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & a-1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a-1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a-1 \end{vmatrix}$$

$$= (a+3)(a-1)^3$$

2. Pour quelle valeur du paramètre a, A est-elle inversible ?

$det(A) = (a+3)(a-1)^3$ donc A inversible si, et seulement si $a \neq -3$ et $a \neq 1$

Exercice 36

à préparer

Exercice 37

Voir énoncé

Correction Exercice 37

1.

On développe directement par rapport à la première ligne et il vient :

$\det(A) = -1 \times (4 \times \lambda - 3 \times 4) - 1 \times (4 \times (-3) - 3 \times (-3)) = -4\lambda + 15.$

A est inversible si et seulement si $\det A \neq 0 \iff \lambda \neq \frac{15}{4}$.

2.

a. $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4-\lambda \\ 0 & 1 & -16+4\lambda \\ -12+3\lambda & 12-3\lambda & -15+\lambda^2 \end{pmatrix}$

b. Pour que $A^2 = I_3$ il faut que les coefficients diagonaux soient égaux à 1 et les autres à 0. Ce qui donne $-12+3\lambda = 0$ et $-16+4\lambda = 0$ et $-15+\lambda^2 = 1$.

   L'unique solution est évidemment $\lambda = 4$.

3. Calcul direct signifie sans doute : en utilisant les comatrices.

Rappel : la comatrice de A est matrice des cofacteurs.

Le cofacteur A_{ij} est le déterminant de A dans lequel on a barré la ligne i et la colonne j.

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}{}^t\mathrm{com}(A) = \frac{1}{15-4\lambda}{}^t\begin{pmatrix} 12-3\lambda & 12-4\lambda & -3 \\ 3-\lambda & 3 & 3 \\ 1 & -4 & -4 \end{pmatrix} = \frac{1}{15-4\lambda}\begin{pmatrix} 12-3\lambda & 3-\lambda & 1 \\ 12-4\lambda & 3 & -4 \\ -3 & 3 & -4 \end{pmatrix}$$

Pour $\lambda = 4$ on obtient $A^{-1} = A$ et donc $A^2 = I_3$

Exercice 38

Voir énoncé

Correction Exercice 38

1.

$\det A = 13 \neq 0$ donc A est inversible et $A^{-1} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{\det(A)}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = \frac{1}{13}\begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$.

2.

$\det A = ac$. Si $ac \neq 0$, $A^{-1} = \frac{1}{ac}\begin{pmatrix} c & -b \\ 0 & a \end{pmatrix}$

3.

$\det A = 0$ car la première et troisième colonne sont opposées. A n'est pas inversible.

4.

B est triangulaire dont sont déterminant est le produit des coefficients diagonaux.

$\det B = 1 \times 3 \times 0 \times 1 = 0$. B n'est pas inversible (ouf).

Exercice 39

à préparer

Exercice 40

Voir énoncé

Correction Exercice 40

1.

Le système est de Cramer si le déterminant de la matrice associée est non nul. Calculons le.

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & m \\ 1 & m & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & m+1 \\ 0 & m-1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}$$

On a fait $L_1 \leftarrow L_1 - L_3$ et $L_2 \leftarrow L_2 - L_3$.

On développe maintenant par rapport à la première ligne et il vient :

$\det A = (m+1)(0-(m-1)) = -(m+1)(m-1)$. $\det A = 0 \Longrightarrow m = 0$ ou $m = 1$

Le système est de Cramer si, et seulement si, $m \neq 1$ et $m \neq -1$.

2.

Formules de Cramer : si le système est de Cramer, il a une unique solution donnée par :

$x_k = \dfrac{\det A_k}{\det A}$.

où A_k est obtenue en remplaçant la $k-$ième colonne de A par le second membre.

2 x

$$x = \frac{\det A_1}{-(m+1)(m-1)} = \frac{1}{-(m+1)(m-1)} \begin{vmatrix} m & 1 & m \\ 1 & m & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}$$

$$x = \frac{1}{-(m+1)(m-1)} \begin{vmatrix} m & 1 & 2m \\ 1 & m & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \frac{2m \times (1-m)}{-(m+1)(m-1)} = \frac{2m}{(m+1)}$$

2. y

$$y = \frac{\det A_2}{-(m+1)(m-1)} = \frac{1}{-(m+1)(m-1)} \begin{vmatrix} 1 & m & m \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}$$

$$y = \frac{1}{-(m+1)(m-1)} \begin{vmatrix} 1 & m-1 & m \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = \frac{-(m-1)}{-(m+1)(m-1)} \times 0 = 0$$

2. z

$$z = \frac{\det A_3}{-(m+1)(m-1)} = \frac{1}{-(m+1)(m-1)} \begin{vmatrix} 1 & 1 & m \\ 1 & m & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$z = \frac{1}{-(m+1)(m-1)} \begin{vmatrix} 1 & 1 & m-1 \\ 1 & m & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \frac{(m-1)(1-m)}{-(m+1)(m-1)} = \frac{m-1}{m+1}$$

3.

Pour $m = 1$, $S \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} x+y+z & = & 1 \\ x+y-z & = & 1 \\ x+y-z & = & 1 \end{array} \right. \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} x+y & = & 1 \\ z & = & 0 \end{array} \right. \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} y & = & 1-x \\ z & = & 0 \end{array} \right.$

On ne peut aller plus loin. Il y a une droite de solutions.

Pour $m = -1$, $S \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} x+y-z & = & -1 \\ x-y-z & = & 1 \\ x+y-z & = & 1 \end{array} \right.$

Les lignes 1 et 3 étant incompatibles, il n'y a aucune solution.

Diagonalisation

Exercice 41

voir énoncé

Correction Exercice 41

0. Rappels

Les valeurs propres λ d'une matrice M sont les racines du polynôme caractéristique (ie les solutions de $\det(M-\lambda I_n)=0$) et les vecteurs propres, des vecteurs *non nuls* X tels que $MX=\lambda X$

1.

On pose $P(\lambda)=\det(A-\lambda I_2)=\begin{vmatrix} 4-\lambda & 4 \\ 1 & 4-\lambda \end{vmatrix}=(4-\lambda)^2-4=(4-\lambda-2)(4-\lambda+2)=(2-\lambda)(6-\lambda)$

Les valeurs propres sont les solutions de $P(\lambda)=0$ soit 2 et 6.

Pour $\lambda=2$, on cherche les vecteurs propres en résolvant $(A-2I_2)X=0.(S)$

$S \iff \left\{\begin{array}{rcl} 2x+4y & = & 0 \\ x+2y & = & 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} y & = & -2x \end{array}\right.$

Il suffit d'en décrire un, ou de décrire une base si la dimension du sous-espace propre dépasse 1.

1. suite

On donne donc $X_2={}^t(1 \quad -2)$. Les vecteurs propres pour $\lambda=2$ sont donc les vecteurs kX_2 pour $k\neq 0$

Pour $\lambda=6$, on cherche les vecteurs propres en résolvant $(A-2I_6)X=0.(S)$

$S \iff \left\{\begin{array}{rcl} -2x+4y & = & 0 \\ x-2y & = & 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} y & = & 2x \end{array}\right.$

On donne donc $X_6={}^t(1 \quad 2)$. Les vecteurs propres pour $\lambda=2$ sont donc les vecteurs kX_6 pour $k\neq 0$

1. Conclusion

Conclusion (non demandée) :

A est diagonalisable (2 valeurs propres distinctes en dimension 2) et sa matrice diagonale est $D=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$

La matrice de passage est $P=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$ et on a $A=PDP^{-1}$

2.

On fait exactement la même chose que dans la question précédente pour trouver comme valeurs propres -2 et 7.

Ainsi, B, matrice carrée de taille 2 a 2 valeurs propres distinctes et est diagonalisable.

2. Suite

On résout $(B+2I)X=0$ pour trouver les vecteurs propres associés à la valeur propre -2.

Il vient : $4x+5y=0$ donc ${}^t(5 \quad -4)$ est un vecteur propre de B pour la valeur propre -2.

2. Fin

On résout $(B-7I)X=0$ pour trouver les vecteurs propres associés à la valeur propre -2.

Il vient : $-x+y=0$ donc ${}^t(1 \quad 1)$ est un vecteur propre de B pour la valeur propre 7.

3.

Cette fois c'est plus intéressant.

Valeurs propres. On pose $P(\lambda)=det(C-\lambda I_3)=\begin{vmatrix} 3-\lambda & 2 & 0 \\ -1 & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix}=(1-\lambda)[-\lambda(3-\lambda)+2]=(1-\lambda)(\lambda^2-3\lambda+2)=$ $-(\lambda-1)^2(\lambda-2)$

Les valeurs propres sont 1 et 2. Attention, C est une matrice de taille 3 qui n'a que deux valeurs propres distinctes, elle peut ne pas être diagonalisable.

3. suite

Cherchons un vecteur propre pour $\lambda=2$ (toujours commencer par le facteur de degré 1, c'est le plus facile…)

On résout $(C-2I_3)X=0(S)$

$$S \iff \left\{ \begin{array}{rcl} x+2y & = & 0 \\ z & = & 0 \end{array} \right.$$

et ${}^t(1 \quad -2 \quad 0)$ est un vecteur propre pour la vp 2.

3. fin

Cherchons 2 vecteurs propres libres pour la valeur propre 1. Attention, il se peut qu'on ne trouve qu'un et que les autres soient liés avec lui…

Cela signifie que C n'est alors pas diagonalisable.

On résout $(C-I_3)X=0(S)$

$$S \iff \left\{ \begin{array}{rcl} 2x+2y & = & 0 \\ -x-y & = & 0 \\ 0 & = & 0 \end{array} \right.$$

Donc, ${}^t(1 \quad 1 \quad 0)$ et ${}^t(1 \quad 1 \quad 1)$ sont deux vecteurs propres libres de C.

En définitive cette matrice est diagonalisable.

Exercice 42

voir énoncé

Correction Exercice 42

1.

Rebelotte. Sans tous les détails fastidieux…

$P(\lambda)=(1-\lambda)^2-4=\lambda^2-2\lambda-3$

Les valeurs propres sont -1 et 3.

Taille 2 avec 2 valeurs propres distinctes : diagonalisable.

On résout $(A+I_2)X=0$ et ${}^t(1 \quad -1)$ est un vecteur propre pour la valeur propre -1.

On résout $(A-3I_2)X=0$ et ${}^t(1 \quad 1)$ est un vecteur propre pour la valeur propre 3.

1. fin

Donc $A=PDP^{-1}$ avec $\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 3 \end{vmatrix}$ et $P=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ donc $P^{-1}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

2.

$P(\lambda)=(7-\lambda)(-5-\lambda)-36=\lambda^2-2\lambda+1=(\lambda-1)^2$

L'unique valeur propre est 1.

Taille 2 avec 1 valeur propre : peut-être pas diagonalisable.

On résout $(A-I_2)X=0$ et ${}^t(3 \quad 2)$ est une base de vecteur propre pour la valeur propre 1.

Le sous-espace propre n'a pas la dimension souhaitée et la matrice n'est pas diagonalisable.

On peut aussi remarquer que si B était diagonalisable, sa matrice diagonale serait l'identité, ce qui, une fois remplacé dans PDP^{-1} ne serait pas possible.

3.

$P(\lambda)=(3-\lambda)^2(7-\lambda)$

Seulement deux valeurs propres en taille 3, peut-être pas diagonalisable.

Pour la valeur propre 3 : on trouve deux vecteurs propres libres ${}^t(1 \quad 0 \quad 1)$ et ${}^t(0 \quad 1 \quad 0)$.

Pour la valeur propre 7 : on trouve le vecteur propre ${}^t(0 \quad 1 \quad 1)$.

Finalement cette matrice est diagonalisable.

3. fin

On a donc

$P=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} D=\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$

et

$P^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Exercice 43

à préparer

Exercice 44

à préparer

Exercice 45

voir énoncé

Correction Exercice 45

1.

$P(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} -\lambda & 3 & 2 \\ -2 & 5-\lambda & 2 \\ 2 & -3 & -\lambda \end{vmatrix}$. On fait $L_2 \leftarrow L_2 - L_1$ pour faire apparaître un zéro et simplifier les coefficients.

Il vient : $P(\lambda) = \begin{vmatrix} -\lambda & 3 & 2 \\ \lambda-2 & 2-\lambda & 0 \\ 2 & -3 & -\lambda \end{vmatrix}$

Maintenant qu'on a deux coefficients opposés ligne 2, on développe par rapport à cette ligne.

1. fin

$P(\lambda) = -(\lambda-2)\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -3 & -\lambda \end{vmatrix} + (2-\lambda)\begin{vmatrix} -\lambda & 2 \\ 2 & -\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)\left[(-3\lambda+6)+(\lambda^2-4)\right] = (2-\lambda)\left[\lambda^2 - 3\lambda + 2\right]$

On factorise $\lambda^2 + 3\lambda - 2 = (2-\lambda)(1-\lambda)$ avec Δ et $P(\lambda) = (2-\lambda)^2(1-\lambda)$.

Le déterminant de A est $P(0) = 4$.

2. a.

Les valeurs propres de A sont les racines de P : 1 et 2.

2. b

On cherche pour chaque valeur propre un sous espace propre de même dimension que sa multiplicité.

La multiplicité est la puissance avec laquelle elle apparaît dans le polynôme caractéristique.

Commençons par $\lambda = 1$

On résout le système, de la même manière que dans les 5 exercices précédents, on cherche une solution au système :

$$S_1 \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} -x+3y+2z & = & 0 \\ -2x+4y+2z & = & 0 \\ 2x-3y-z & = & 0 \end{array} \right.$$

On remarque aisément que $X_1 = (1, 1, -1)$ est une solution de ce système.

2. b suite

Les plus motivés peuvent envisager un pivot de Gauss qui dira la même chose.

Donc X_1 est un vecteur propre pour la valeur propre $\lambda = 1$.

Pour $\lambda = 2$, on cherche 2 vecteurs propres libres.

En effet, la multiplicité est 2…

On résout alors : $S_2 \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} -2x+3y+2z & = & 0 \\ -2x+3y+2z & = & 0 \\ 2x-3y-2z & = & 0 \end{array} \right.$

Les trois lignes ayant le bon goût d'être équivalentes, il suffit d'en garder une. On cherche alors deux solutions libres à l'équation de plan $2x - 3y - 2z = 0$.

$(1, 0, 1)$ et $(3, 2, 0)$ sont deux solutions libres de cette équation.

2. b. fin

Conclusion : on a trouvé deux vecteurs propres pour $\lambda = 2$.

La matrice A est bien diagonalisable avec

$P = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ qui vérifient $A = PDP^{-1}$

2. c

$A^n = (PDP^{-1})^n$.

On montre par une récurrence triviale que $A^n = PD^nP^{-1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 46

à préparer

Exercice 47

voir énoncé

Correction Exercice 47

1.

$P(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 0 \\ 1/2 & 3/2-\lambda & -1/2 \\ -1/2 & 1/2 & 3/2-\lambda \end{vmatrix}$.

On fait $L_2 \leftarrow L_2 + L_3$ pour faire apparaître un zéro et simplifier les coefficients.

Il vient : $P(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 2-\lambda & 1-\lambda \\ -1/2 & 1/2 & 3/2-\lambda \end{vmatrix}$

On développe par rapport à L_2.

1. suite

$P(\lambda) = (2-\lambda)\begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 \\ -1/2 & 3/2-\lambda \end{vmatrix} - (1-\lambda)\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ -1/2 & 1/2 \end{vmatrix} = (2-\lambda)(1-\lambda)(3/2-\lambda) - (1-\lambda)(1/2(1-\lambda)+1/2)$

$= (1-\lambda)[(2-\lambda)(3/2-\lambda) - 1/2(2-\lambda)] = (1-\lambda)(2-\lambda)[(3/2-\lambda) - 1/2] = (1-\lambda)(2-\lambda)(1-\lambda) = (1-\lambda)^2(2-\lambda)$

Les valeurs propres de A sont 1, avec la multiplicité 2 et 2 avec la multiplicité 1.

1. suite encore...

Vecteurs propres pour $\lambda = 1$

On résout le système, $(A - I)X = O$:

$S_1 \iff \left\{ \begin{array}{rcl} y & = & 0 \\ (1/2)x + (1/2)y - (1/2)z & = & 0 \\ (-1/2)x - (1/2)y + (1/2)z & = & 0 \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{rcl} y & = & 0 \\ x - z & = & 0 \\ x - z & = & 0 \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{rcl} x & = & z \\ y & = & 0 \end{array} \right.$

Donc les vecteurs propres sont tous colinéaires à $(1, 0, 1)$.

Le sous-espace propre associé à la valeur propre 1, qui est de multiplicité 2, est donc de dimension 1. Cela prouve (pour la question d'après) que la matrice n'est pas diagonalisable.

1. fin

Continuons avec $\lambda = 2$

On résout le système, $(A - I)X = O$:

$S_1 \Longleftrightarrow \begin{cases} -x+y &= 0 \\ (1/2)x - (1/2)y - (1/2)z &= 0 \\ (-1/2)x + (1/2)y - (1/2)z &= 0 \end{cases}$ $S_1 \Longleftrightarrow \begin{cases} -x+y &= 0 \\ x-y-z &= 0 \\ -x+y-z &= 0 \end{cases}$ $S_1 \Longleftrightarrow \begin{cases} -x+y &= 0 \\ -x+y+z &= 0 \\ x-y+z &= 0 \end{cases}$

$S_1 \Longleftrightarrow \begin{cases} x &= y \\ x &= y \\ z &= 0 \end{cases}$

On obtient, par exemple, le vecteur propre $(1, 1, 0)$.

2.

Nous l'avons justifié dans la question précédente.

3. a

On calcule le déterminant de P et il vaut -2.

L'inverse de P est $P^{-1} = 1/2 \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Arrivé ici, j'imagine que vous n'avez plus besoin des détails.

3. b

Le produit $T = P^{-1}AP$ vaut : $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

On calcule $T^2 = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $T^3 = \begin{pmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

3. b suite

Prouvons, par récurrence que $T^n = \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \forall n \in \mathbb{N}$.

C'est trivialement vrai pour $n = 0$ et nous l'avons justifié pour $n = 1$ et $n = 2$.

3. b. fin

Supposons qu'il existe un naturel n tel que $T^n = \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$,

alors $T^{n+1} = T \times T^n = \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^{n+1} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & n+1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Ce qui prouve la formule, d'après le principe de récurrence.

3.c

$T = P^{-1}AP \Longleftrightarrow A = PTP^{-1} \forall n \in \mathbb{N}$

Le lecteur qui apprécie les produits de matrice n'a plus qu'à remplacer pour obtenir une expression de chaque coefficient de A.

Exercice 48

à préparer

Exercice 49

voir énoncé

Correction Exercice 49

1. a)

La diagonalisation est similaire à toutes les précédentes.

Pour calculer le polynôme caractéristique on peut effectuer la transformation $L_2 \leftarrow L_2 + L_3$ et développer par rapport à L_2.

On obient après simplification : $P(\lambda) = (1-\lambda)^2(2-\lambda)$

Les valeurs propres sont 1 et 2 avec multiplicités respectives 2 et 1.

Les vecteurs propres s'obtiennent en posant et résolvant les systèmes, il vient :

Pour $\lambda = 2$, $(1, -1, 1)$ est un vecteur propre.

Pour $\lambda = 1$, $(1, 0, 1)$ et $(1, -1, 0)$ sont des vecteurs propres libres.

La matrice A est donc diagonalisable cas la somme des dimensions de ses sous-espaces propres est 3 (la dimension de l'espace).

Matrice de passage

On a donc $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ qui vérifient $A = PDP^{-1}$

De plus $P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

A^n

On a donc $A^n = PD^nP^{-1}$ avec $D^n = \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

2. u_n, v_n, w_n

Le systeme s'exprime, en posant $X_n =^t (u_n, v_n, w_n)$:

$X_{n+1} = AX_n$ et $X_0 =^t (1, 1, 1)$

Donc, par récurrence sur $n \in \mathbb{N}, X_n = A^n X_0 = PD^nP^{-1}X_0$

Calculer l'expression de u_n, v_n et w_n demande d'effectuer tous les produits avec $n \in \mathbb{N}$ quelconque.

Cet entraînement est laissé aux lecteurs les plus téméraires…