Licence 2 – FaSEST –
Calcul matriciel
Devoir Surveillé – Mars 2026 –
Durée 2h – Sections 1 et 2

Les documents et calculatrices programmables sont interdits. Aucun brouillon ne sera corrigé. Toutes les réponses devront être soigneusement justifiées.

Exercice 1

Expliciter la matrice $A \in M_3(IR)$ définie de la manière suivante $\begin{cases} \text{si } i > j, a_{ij} = i + j \\ \text{si } i = j, a_{ii} = 0 \\ \text{si } i < j, a_{ij} = i - j \end{cases}$

Exercice 2

Soit A = $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 4 \\ 0 & -3 & 0 \end{pmatrix}$, B = $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$, C = $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 10 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ et D = $\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

Indiquer les produits de deux matrices qui sont possibles (rappeler la règle utilisée). Effectuer **l'un** de ces produits.

Exercice 3

Soit A = $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.

1) Calculer le rang de A. Justifier que A est inversible.
2) Démontrer que A² - 3A +2 $I_3 = 0_3$. En déduire la matrice inverse de A.
3) BONUS : Retrouver le résultat en utilisant la méthode de Jordan-Gauss.

Exercice 4

Soit A = $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$

1) Déterminer la matrice B telle que A = B + I_2
2) Calculer B^2 puis calculer $B^n, \forall n > 2$
3) Montrer par récurrence que : $\forall n \in IN, A^n = I_2 + nB$

Exercice 5

Soit A = $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

1) Montrer que $A = 2I_3 + B$ où B est une matrice à préciser.
2) Calculer B^2 et B^3. Déduire que pour tout $n \geq 3$, $B^n = 0_3$.
3) En utilisant la formule du binôme de Newton, calculer A^n pour tout $n \geq 0$.