Correction DS _ L2 _ 1 leçs 2025

Ex 1 (1,5) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\quad m_{11} = m_{22} = m_{33} = m_{13} = m_{31} = 1$.

$m_{21} = m_{23} = m_{12} = m_{32} = 0$

Ex 2 (6) 1) $A \in \mathcal{M}_{np}(\mathbb{R})$ $\quad B \in \mathcal{M}_{qr}(\mathbb{R})$ produit AB possible si $p = q$

0,5 (alors AB est de dimension (n,r))

$A \in \mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R})$ $\quad B \in \mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{R})$ $\quad C \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ $\quad D \in \mathcal{M}_{3,2}(\mathbb{R})$

0,5 on peut donner effectuer les produits AB, BC, BD, DA, DB

Par exemple $BC \in \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ $\quad BC = \begin{pmatrix} 1\times1 + 2\times2 + 0\times3 \\ 3\times1 + 1\times2 + 4\times3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 17 \end{pmatrix}$

1

2) on cherche $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ tq $AM = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

$AM = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a+c & 2b+d \\ 3a+2c & 3b+2d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

2

$\begin{cases} 2a+c=0 \\ 3a+2c=1 \end{cases}$ $\quad \begin{cases} 2b+d=1 \\ 3b+2d=0 \end{cases}$ $\quad$ donc $\begin{cases} c=-2a \\ -a=1 \end{cases}$ $\quad d = 1-2b$

$L_2 - 2L_1 :\ -b = -2$

$\begin{cases} a=-1 \\ c=2 \end{cases}$ $\quad d=-3$, $\ b=2$ $\qquad M = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$

3) $A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 4 \\ 12 & 7 \end{pmatrix}$

on cherche α, β tq $\begin{pmatrix} 7 & 4 \\ 12 & 7 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2\alpha & \alpha \\ 3\alpha & 2\alpha \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \beta & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

2

$\begin{cases} 7 + 2\alpha + \beta = 0 \\ 12 + 3\alpha = 0 \end{cases}$ $\quad \begin{cases} \beta = -7 - 2\alpha = 1 \\ \alpha = -4 \end{cases}$

donc $A^2 - 4A + I_2 = 0$ $\qquad A^2 - 4A = -I_2$ $\qquad A(A - 4I_2) = -I_2$

Donc $A(4I_2 - A) = I_2$ donc A inversible d'inverse $4I_2 - A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$

Ex 3 (3,5) 1) $r(A) = r\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 3$ $\qquad r(A) =$ dimension de la matrice donc A inversible.

1,5 $\qquad L_3 - L_1$

→

2) $AB = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = 2 I_3$ donc A inversible d'inverse $A^{-1} = \frac{1}{2} B$

2

$A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Ex 4 $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$

4

1) $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ -6 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-2^2 & 2^2-1 \\ 2-2^3 & 2^3-1 \end{pmatrix}$

1,5 $A^3 = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ -6 & 7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 & 7 \\ -14 & 15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-2^3 & 2^3-1 \\ 2-2^4 & 2^4-1 \end{pmatrix}$

2) Initialisation : on vérifie que P_1 est vraie

$A^1 = A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 2-2^1 & 2^1-1 \\ 2-2^2 & 2^2-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$ cqfd.

2,5 Hérédité : on suppose que P_n est vraie pour un n fixé et on mq P_{n+1} est vraie

$A^{n+1} = A^n \times A = \begin{pmatrix} 2-2^n & 2^n-1 \\ 2-2^{n+1} & 2^{n+1}-1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2(2^n-1) & 2-2^n+3(2^n-1) \\ -2(2^{n+1}-1) & 2-2^{n+1}+3(2^{n+1}-1) \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 2-2^{n+1} & 2\times 2^n - 1 \\ 2-2^{n+2} & 2\times 2^{n+1} - 1 \end{pmatrix}$ cqfd.

Conclusion : P_1 est vraie, P_n s'est transmise donc P_n est vraie $\forall n \in \mathbb{N}^*$

Ex 5 1) $A = 2 I_3 + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{B}$

5 0,5

2)a) $B^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $B^3 = O_3$

1,5 et $\forall n \geq 3$, $B^n = B^{n-3} \times \underbrace{B^3}_{O_3} = O_3$

b) $B \times I_3 = I_3 B$ $(2I_3 + B)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B^k (2I_3)^{n-k}$ 1

$(2I_3+B)^n = \binom{n}{0} B^0 (2I_3)^n + \binom{n}{1} B^1 (2I_3)^{n-1} + \binom{n}{2} B^2 (2I_3)^{n-2} + O_3$

$A^n = 2^n I_3 + n\, 2^{n-1} B + \frac{n(n-1)}{2} 2^{n-2} B^2$

2 $A^n = \begin{pmatrix} 2^n & n2^n & \frac{n(n-1)}{2} 2^{n-1} \\ 0 & 2^n & n2^{n-1} \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}$