Livret d'exercices – L 2 – FSES
Analyse 2

Rappel (?) utile : le raisonnement par récurrence

C'est un raisonnement que l'on utilise pour montrer qu'une propriété est vraie pour tout n entier naturel (ou entier naturel strictement positif…). On peut l'utiliser dans de nombreux domaines des mathématiques : arithmétique, suites, matrices…

Exemples :

Exemple 1 : P_n: « pour tout n > 0, on a 1+ 2+…+n = $\frac{\mathrm{n(n+1)}}{2}$ »

Exemple 2 : soit (U_n) la suite définie par $U_0 = 2 \; et \; U_{n+1} = \frac{1}{2}U_n + 2$.

P_n: « Montrer que pour tout entier naturel n, $U_n = 4 - \frac{1}{2^{n-1}}$ »

Exemple 3 : soit (U_n) la suite définie par $U_0 = 2 \; et \; U_{n+1} = U_n + 2n + 5$.

P_n: « Montrer que pour tout entier naturel n, $U_n > n^2$ »

Exemple 4 : Soit A = $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

P_n: « Montrer que pour tout n > 0, on a $A^n = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ »

Ce raisonnement se déroule toujours en trois étapes. Il est impératif de respecter ces trois étapes et d'être très scrupuleux dans la rédaction.

On veut montrer qu'une propriété P_n est vraie pour tout entier naturel n.

Etape 1 : initialisation

On vérifie que la propriété est vraie au rang n = 0

Etape 2 : hérédité

On suppose que la propriété est vraie **pour un entier n fixé (c'est l'hypothèse de récurrence)** et on montre qu'elle se transmet au rang (n+1).

Etape 3 : conclusion

La propriété est vraie au rang 0, elle s'est transmise, donc elle est vraie pour tout n entier naturel.

Mise en application sur des exemples

Retour à l'exemple 1

P_n: pour tout n > 0, on a 1+ 2+…+n = $\frac{\mathrm{n(n+1)}}{2}$ **.** Montrons cette propriété par récurrence sur n.

Initialisation : vérifions que la propriété pour n = 1

$\frac{1(1+1)}{2} = 1$ donc la propriété est vraie.

Hérédité : **on suppose** que pour un entier n fixé, P_n est vraie. On veut montrer qu'elle se transmet au rang (n+1) c'est-à-dire que 1+2+…+(n+1) = $\frac{(n+1)(n+1+1)}{2} = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$

On va se servir de l'hypothèse de récurrence.

1+2+….+ (n+1) = 1+2+…+ n+ (n+1) = $\frac{n(n+1)}{2}$ + (n+1) = $\frac{n(n+1)}{2} + \frac{2(n+1)}{2} = \frac{(n+2)(n+1)}{2}$

Ce qu'il fallait démontrer !

Conclusion : La propriété est vraie au rang 1, elle s'est transmise, donc elle est vraie pour tout n entier naturel > 0.

Retour à l'exemple 4

Soit (U_n) la suite définie par $U_0 = 2 \ et \ U_{n+1} = U_n + 2n + 5$.

P_n: Montrer que pour tout entier naturel n, $U_n > n^2$

Initialisation : vérifions que la propriété pour n = 0

$U_0 = 2$ donc on a bien $U_0 > 0^2$. Donc la propriété est vraie au rang 0.

Hérédité : **on suppose** que pour un entier n fixé, P_n est vraie. On veut montrer qu'elle se transmet au rang (n+1) c'est-à-dire que $U_{n+1} > (n+1)^2$

On sait par définition que $U_{n+1} = U_n + 2n + 5$.

Or par hypothèse de récurrence, $U_n > n^2$ donc $U_{n+1} > n^2 + 2n + 5$.

Reste à vérifier que $n^2 + 2n + 5$ > (n+1)². Or (n+1)² = n² + 2n + 1 donc l'inégalité est vraie.

Donc $U_{n+1} > (n+1)^2$

Conclusion : La propriété est vraie au rang 0, elle s'est transmise, donc elle est vraie pour tout n entier naturel.

<u>Exercices se rapportant au chapitre Suites</u>

<u>Exercice Su.1</u> Questions « en vrac »

1) Si le premier terme d'une suite (U_n) est U_0, quel est le rang du 25ème terme ?
2) Les nombres 15, 19, 25 sont-ils 3 termes consécutifs d'une suite arithmétique ?
3) Les nombres 2, 8, 32 sont-ils 3 termes consécutifs d'une suite géométrique ?
4) Si le premier terme d'une suite (U_n) est U_1, quel est le rang du 14ème terme ?

<u>Exercice Su.2</u> Les questions sont indépendantes

1) La suite (U_n) est une SA de premier terme U_0 = 5 et de raison r = 2. Calculer U_{25} et $S_{13}=\sum_{k=0}^{13} U_k$
2) La suite (U_n) est une SA de raison r = 3 et telle que U_{20} = 64. Calculer S $=\sum_{k=20}^{35} U_k$
3) Calculer la somme des nombres pairs de 2 à 6612.

<u>Exercice Su.3</u> Les questions sont indépendantes

1) La suite (U_n) est une SG de premier terme U_0 = 1 et de raison q = 2. Calculer U_{10} et $S_{10}=\sum_{k=0}^{10} U_k$
2) La suite (U_n) est une SG telle que U_5 = 3 et U_7 = 12. Déterminer q.
4) Soit une SG de premier terme $U_0 = 4096$ et de raison q = 0.5. Calculer la somme

S $=\sum_{k=4}^{12} U_k$

<u>Exercice Su.4</u>

Soit (U_n) la suite définie par $\mathrm{U_0} = 12$ et $\mathrm{U_{n+1}} = \frac{3}{4}\mathrm{U_n} + 2$

1ère méthode

1) Montrer par récurrence que pour tout n entier naturel $U_n \geq 8$.
2) Déterminer le sens de variation de (U_n).
3) Etudier la convergence de la suite.

2ème méthode

Retrouver ces résultats en utilisant la méthode d'étude des suites arithmético-géométriques.

<u>Exercice Su.5</u>

Etudier les variations des suites de termes généraux :

1) $\mathrm{U_n} = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1}$
2) $\mathrm{U_{n+1}} = \sqrt{1 + {U_n}^2}$
3) $\mathrm{U_n} = 1{,}2^n + n$
4) $\mathrm{U_n} = \sum_{\mathrm{k=1}}^{\mathrm{n}} \frac{1}{\mathrm{k}}$.

Exercice Su.6

Déterminer la limite des suites de termes généraux :

1) $\mathrm{U_n} = \frac{n^2-1}{n+1}$
2) $\mathrm{U_n} = \frac{1-n^3}{n-n^4}$ pour n entier naturel non nul
3) $U_n = -2\left(\frac{1}{3}\right)^n$
4) $U_n = -2(3)^n$
5) $\mathrm{U_n} = \sum_{\mathrm{k=1}}^{\mathrm{n}} \frac{1}{2^k}$.

Exercice Su.7

Soit $(\mathrm{U_n})_{\mathrm{n \in IN}}$ une suite définie par $\mathrm{U_0} = 1$ et $\mathrm{U_{n+1}} = \frac{2\mathrm{U_n}}{3+2\mathrm{U_n}}$

1) Calculer les 5 premiers termes de la suite.
2) La suite $(\mathrm{U_n})_{\mathrm{n \in IN}}$ est-elle arithmétique ?
3) On suppose que pour tout entier naturel n, $\mathrm{U_n} \neq 0$ et $\mathrm{V_n} = \frac{1}{\mathrm{U_n}}$
   a) Montrer que $(\mathrm{V_n})_{\mathrm{n \in IN}}$ est arithmétique et donner ses éléments caractéristiques.
   b) Donner l'expression de $\mathrm{V_n}$ en fonction de n.
   c) En déduire l'expression de $\mathrm{U_n}$ en fonction de n.
4) Etudier la monotonie de $(\mathrm{U_n})_{\mathrm{n \in IN}}$.
5) Montrer que pour tout entier naturel n, 0 < $\mathrm{U_n} < 1$.

Exercice Su.8

On considère la suite $(\mathrm{U_n})_{\mathrm{n \in IN}}$ de réels strictement positifs, définie par

$\mathrm{U_0} = 2 \text{ et pour tout } \mathrm{n} \in \mathrm{IN}, \ln(\mathrm{U_{n+1}}) = 1 + \ln(\mathrm{U_n})$

1) Exprimer $\mathrm{U_{n+1}}$ en fonction de $\mathrm{U_n}$ et préciser la nature de la suite $(\mathrm{U_n})_{\mathrm{n \in IN}}$.
2) Déterminer la monotonie de la suite $(\mathrm{U_n})_{\mathrm{n \in IN}}$ et préciser sa limite.
3) Exprimer la somme $\sum_{\mathrm{k=0}}^{\mathrm{n}} \mathrm{U_k}$ en fonction de n.
4) Exprimer la somme $\sum_{\mathrm{k=0}}^{\mathrm{n}} \ln(\mathrm{U_k})$ en fonction de n. En déduire le calcul de $\mathrm{U_1} \times \mathrm{U_2} \times ... \times \mathrm{U_n}$ en fonction de n.

Exercice Su.9

Utiliser le théorème des suites monotones pour montrer la convergence des suites de terme général :

1) $\mathrm{U_n} = \sum_{\mathrm{k=1}}^{\mathrm{n}} \frac{1}{\mathrm{k}^2}$.
2) $\mathrm{U_n} = \prod_{\mathrm{k=1}}^{\mathrm{n}} \frac{2\mathrm{k}-1}{2\mathrm{k}}$

Exercice Su.10

1) Utiliser le théorème des suites monotones pour montrer la convergence de la suite de terme général $\mathrm{U_n} = \sum_{\mathrm{k=1}}^{\mathrm{n}} \frac{1}{\mathrm{k+n}}$.
2) Montrer que pour tout x $\in [0; 1[, \ln(1+\mathrm{x}) \leq \mathrm{x} \leq -\ln(1-\mathrm{x})$
3) Déduire la limite de la suite (U_n)

Exercice Su.11

Soit (U_n) la suite définie par $\mathrm{U_n} = \sum_{\mathrm{k=1}}^{\mathrm{n}} e^{1/k}$ pour tout n≥ 1.

Montrer en utilisant le théorème de comparaison que la suite diverge.

Exercice Su.12

Soit (U_n) la suite définie par $\mathrm{U_n} = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$

Montrer que $\frac{1}{2\sqrt{\mathrm{n+1}}} \leq \mathrm{U_n} \leq \frac{1}{\sqrt{\mathrm{n+1}}}$ puis déterminer la limite de la suite.

Exercice Su.13

Soit (U_n) la suite définie par $\mathrm{U_n} = \sum_{\mathrm{k=0}}^{\mathrm{n}} \frac{1}{\mathrm{k!}}$ et soit (V_n) la suite définie par $\mathrm{V_n} = \mathrm{U_n} + \frac{1}{\mathrm{n(n!)}}$

Montrer que ces suites convergent vers une même limite (que l'on ne cherchera pas à déterminer)

Exercices se rapportant au chapitre Séries

Exercice Se.1

Donner la nature de la série de t.g. $\frac{n-3}{n+4}$.

Exercice Se.2

Etudier la nature de la série de t.g. $U_n = \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$ pour n≥ 1

Première méthode : étudier la suite des sommes partielles

Deuxième méthode : utiliser le critère d'équivalence.

Exercice Se.3

Etudier la nature des séries de t.g. suivants et donner leur somme éventuelle

1) $U_n = \left(\frac{2}{3}\right)^n$, n ≥ 0.
2) $U_n = 3^n e^{-n}$, n ≥ 0.
3) $U_n = \frac{5^n}{n!}$
4) $U_n = \frac{3^{3n+1}}{(n+1)!}$, pour n ≥ 0.

(On reconnaitra une série particulière du cours).

Exercice Se.4

En utilisant le critère de comparaison, montrer que la série de t.g. $U_n = \frac{\ln(n)}{n}$ est divergente (pour n ≥ 1)

Exercice Se.5

En utilisant le critère de d'Alembert (ou en reconnaissant des séries « classiques ») déterminer la nature des séries de t.g.

1) $U_n = \frac{1}{n!}, n \geq 0$

2) $U_n = \frac{n!}{n^n}$, n≥ 0

3) $U_n = \frac{n!n^n}{(2n)!}$, n$\geq 0$

Exercice Se.6

En utilisant le critère de Cauchy (ou en reconnaissant des séries « classiques ») déterminer la nature des séries de t.g.

1) $U_n = \left(\frac{n}{2n+1}\right)^n, n \geq 0$
2) $U_n = \left(\frac{3n+2}{2n+5}\right)^n, n \geq 0$
3) $U_n = \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}, n \geq 0$
4) $U_n = \frac{n^{\ln(n)}}{(\ln(n))^n}, n > 1$

Exercice Se.7

1) Montrer que pour tout n > 0 on a $\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$.
2) Calculer la somme partielle de la série $\sum_{n>0} \frac{1}{n(n+1)}$. Quelle est la nature de la série ?
3) Etudier le la même façon la série de t.g. $\frac{1}{n(n-1)}$ avec $n \geq 2$.
4) Montrer que pour tout $n \geq 2$, $\frac{1}{n^2} \leq \frac{1}{n(n-1)}$ et en déduire la nature de la série de t.g. $\frac{1}{n^2}$.

Exercice Se.8

1) Quelle est la nature des séries suivantes $\sum_{n\geq 1} \frac{2n^2+1}{n^4}$ et $\sum_{n\geq 1} \frac{3n+5}{n^2}$?
2) Discuter selon la valeur du réel a strictement positif, la nature de la série de terme général

$$U_n = \frac{n^2+2}{n^a+1}$$

Exercice Se.9

Etudier la nature des séries de termes généraux suivants (on utiliser des critères d'équivalence ou du « $n^{\alpha}U_n$ »)

1) $U_n = \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{n}, n > 0$
2) $U_n = e^{\frac{1}{n}} - 1$, pour $n \geq 1$ (penser aux développements limités)
3) $U_n = \sqrt[n^2]{3} - 1$, pour $n \geq 1$ (on transformera l'écriture !)
4) $U_n = \ln\left(\frac{n^2+n+1}{n^2+n-1}\right)$, pour $n \geq 1$ (on montrera que $\frac{n^2+n+1}{n^2+n-1} = 1 + \frac{2}{n^2+n-1}$)
5) $U_n = e^{-\sqrt{n}}$, $n \geq 0$.

Exercices se rapportant au chapitre Primitives et intégration.

Exercice PI.1

Calculer les intégrales suivantes :

$$A = \int_1^4 \frac{2x^3 + x^2 - 5x + 1}{x}\,\mathrm{d}x,\quad B = \int_3^4 \frac{2x-2}{x^2-2x}\,\mathrm{d}x,\quad C = \int_{-\frac{3}{2}}^{-1} e^{2x+3}\,\mathrm{d}x,\quad D = \int_5^{10} \sqrt{t-1}\,\mathrm{d}t,$$

$$E = \int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{x+3}}\,\mathrm{d}x,\ F = \int_2^3 \frac{x+4}{x^2+8x-9}\,\mathrm{d}x,\ G = \int_2^3 \frac{1}{(2x+3)^3}\,\mathrm{d}x \text{ et } H = \int_0^2 \frac{x^2+2x}{x+1}\,\mathrm{d}x$$

Indication : Pour H : écrire $\frac{x^2+2x}{x+1}$ sous la forme : $ax + b + \frac{c}{x+1}$;

$I = \int_{-1}^{2} \frac{x}{x^2+1}\,dx$ $\qquad$ $J = \int_{-1}^{2} x e^{3x-1}\,dx$

Exercice PI.2

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (x-1)\mathrm{e}^{-x}$.

Déterminer a et b réels tels que la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par $\mathrm{F}(x) = (ax+b)\mathrm{e}^{-x}$ soit une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

Exercice PI.3

Déterminer la primitive F de f vérifiant la condition donnée.

1. $f(x) = 3x(x^2+1)^4$ et $\mathrm{F}(1) = 0$,
2. $f(x) = \dfrac{\ln^2(x)}{x}$ et $\mathrm{F}(\mathrm{e}) = 0$.

Exercice PI.4

Quelques applications économiques (les questions sont indépendantes)

1) Le coût marginal de production d’un bien de consommation est donné par

Cm(q) = $-12q^2 + 18q + 32$ et les coûts fixes valent 43. Déterminer l’expression du coût total, du coût moyen et du coût variable.

2) Une recette marginale est donnée par Rm(q) = $-2q^2 - 2q + 60$. Déterminer la fonction recette totale et la fonction demande.
3) Soit la fonction demande D(q) = $25 - q^2$ et la fonction offre O(q) = $2q+1$. Sous l’hypothèse d’une concurrence parfaite, calculer le surplus consommateur SC.
4) L’investissement net est donné par I(t) = $9\sqrt{t}$. Déterminer le niveau de la formation de capital entre la 5ième et la 8ième année (intervalle [4 ;8])

Exercice PI.5

On considère la fonction f définie sur $]0,+\infty[$ par $f(x)=\dfrac{1+\ln(x)}{x}$.

1. Étudier les variations de f sur $]0,+\infty[$,
2. Déterminer l'abscisse a du point d'intersection de $\mathcal{C}_f$ avec l'axe des abscisses,

3. On note S_1 l'aire de la partie de plan délimitée par l'axe des abscisses, la courbe $\mathcal{C}_f$ et les droites d'équation $x=\dfrac{1}{e}$ et $x=1$.
   On note S_2 l'aire de la partie de plan délimitée par l'axe des abscisses, la courbe $\mathcal{C}_f$ et les droites d'équation $x=1$ et $x=m$, $m>1$.
   Déterminer m pour que $S_1=S_2$.

Exercice PI.6

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=9x^2+4x$.

1. Calculer la valeur moyenne de f sur l'intervalle $[0,2]$. (On notera V_m cette valeur)
2. Déterminer $c\in[0,2]$ tel que $f(c)=V_m$.
3. Déterminer $b>0$ tel que la valeur moyenne de f sur $[0,b]$ soit égale à 5.

Exercice PI.7

Pour tout $x>0$, on pose $\mathrm{I}(x)=\displaystyle\int_x^{2x}\frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1+t^2}}$.

1. (a) Montrer que si $t\geqslant 0$ on a : $\dfrac{1}{1+t}\leqslant\dfrac{1}{\sqrt{1+t^2}}$.

   (b) Montrer que si $t>0$ on a : $\dfrac{1}{\sqrt{1+t^2}}\leqslant\dfrac{1}{t}$.
2. (a) En déduire, pour $x>0$, un encadrement de $\mathrm{I}(x)$.

   (b) Déterminer $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\mathrm{I}(x)$.

Exercice PI.8

On pose : $\mathrm{I}_n=\displaystyle\int_0^1 t^n\sqrt{1-t}\,\mathrm{d}t \qquad \forall n\in\mathbb{N}$.

1. Justifier l'existence de I_n.
2. Montrer que : $\forall n\in\mathbb{N}$ on a : $\mathrm{I}_n\geqslant\mathrm{I}_{n+1}$. (Cela signifie que la suite (I_n) est décroissante)
3. Montrer que : $\forall n\in\mathbb{N}$ on a : $\mathrm{I}_n\geqslant 0$. (Cela signifie que la suite (I_n) est minorée par 0)

Exercice PI.9

À l'aide d'une intégration par parties, calculer les intégrales suivantes :

$$A = \int_0^3 x\sqrt{3-x}\,\mathrm{d}x,\ B = \int_0^1 \frac{\ln(x+1)}{(x+1)^2}\,\mathrm{d}x \text{ et } C = \int_0^{-1} (2x^2+1)e^{3x}\,\mathrm{d}x.$$

Exercice PI.10

1. (a) Déterminer réels a, b et c réels tels que : $\forall x > 0$, $\dfrac{1}{x(x^2+1)} = \dfrac{a}{x} + \dfrac{bx+c}{x^2+1}$.

   (b) En déduire l'intégrale : $I = \displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{1}{x(x^2+1)}\,\mathrm{d}x$.

2. À l'aide d'une intégration par parties, calculer $J = \displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{x\ln x}{(x^2+1)^2}\,\mathrm{d}x$.

Exercice PI.11

Pour tout entier naturel n, on note :

$$I_n = \int_0^1 \frac{t^n}{1+t^2}\mathrm{D}t \qquad J_n = \int_0^1 t^n \ln(1+t^2)\,\mathrm{d}t$$

1. (a) Montrer que : $\forall n \geqslant 0,\quad 0 \leqslant I_n \leqslant \frac{1}{n+1}$.

   (b) En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n$.

2. À l'aide d'une intégration par parties, montrer que : $J_n = \dfrac{\ln 2}{n+1} - \dfrac{2}{n+1} I_{n+2}$

3. En déduire la limite de (J_n) et celle de (nJ_n).

Exercice PI.12

En utilisant le changement de variable indiqué, calculer les intégrales suivantes :

$A = \int_1^2 \frac{(\ln t)^2}{t}\mathrm{d}t$ avec x = lnt $\qquad$ B = $\int_0^3 \frac{t\ln(1+t^2)}{1+t^2}\mathrm{d}t$ avec x = 1+t²

C = $\int_1^2 \frac{\mathrm{d}x}{x+\sqrt{x}}$ avec t = $\sqrt{x}$

Exercice PI.13

1) Calculer l'intégrale I $=\int_0^1 \frac{e^x}{1+e^x}dx$ à l'aide du changement de variable u = e^x.
2) Soit J = $\int_0^1 \frac{1}{1+e^x}dx$. Montrer que I + J = 1. En déduire la valeur de J.

Exercice PI.14

1. En posant $y = x^n$, calculer $J_n = \int_0^1 \frac{x^{2n-1}}{1+x^n}\,dx$
2. En déduire $\lim_{n \to +\infty} J_n$.

Exercice PI.15

1. (a) Déterminer a et b réels tels que : $\forall t > 1$, $\frac{1}{t^2-1} = \frac{a}{t-1} + \frac{b}{t+1}$.

   (b) Calculer : $I = \int_e^{e^2} \frac{1}{t^2-1}\,dt$.
2. En posant $t = e^x$, calculer $J = \int_1^2 \frac{1}{e^x - e^{-x}}\,dx$.

Exercice PI.16

Etudier la convergence des intégrales généralisées suivantes et donner leur valeur éventuelle :

$I = \int_{-1}^{1} \frac{1}{x-1}dx$ $\qquad J = \int_0^{+\infty} xe^{-x}dx$ $\qquad K = \int_{-\infty}^{0} xe^{-x}dx$ $\qquad L = J = \int_1^{+\infty} x^{\frac{1}{3}}dx$

Exercices se rapportant au chapitre fonctions de deux variables

Exercice fo.1

Pour chacune des fonctions suivantes, préciser le domaine de définition $\mathcal{D}$ et le représenter.

1. $f(x,y) = x^2 + 2y^2 - x^3\sqrt{y}$
2. $f(x,y) = \dfrac{xy}{x^2 + y^2 - 2y - 3}$
3. $f(x,y) = \ln(x^2 + y - 1)$
4. $f(x,y) = \sqrt{xy - x + 2y - 2}$ Indication : Vérifier que $xy - x + 2y - 2 = (y-1)(x+2)$

Exercice fo.2

Dans chacun des cas suivants, déterminer et représenter la courbe de niveau k de la fonction f :

1. $f(x;y) = \ln(xy - 1)$ et $k = 0$
2. $f(x;y) = e^{y - x^2 + 2x}$ et $k = 1$

Exercice fo.3

On considère la fonction f définie par $f(x,y) = \mathrm{e}^{3x} - y + 2\sqrt{xy}$.

1. Déterminer le domaine de définition $\mathcal{D}$ de la fonction f.
2. Calculer alors les dérivées partielles de f en un point $\mathrm{X} = (x,y)$ avec $xy \neq 0$.

Exercice fo.4

On reprend les fonctions de l'exercice 1.
Calculer les dérivées partielles de f en un point quelconque de $\mathcal{D}$ puis les élasticités partielles au point a (après avoir vérifié que $a \in \mathcal{D}$ et que $f(a) \neq 0$).

1. $f(x,y) = x^2 + 2y^2 - x^3\sqrt{y}$ $a = (-1,1)$
2. $f(x,y) = \dfrac{xy}{x^2 + y^2 - 2y - 3}$ $a = (1,1)$
3. $f(x,y) = \ln(x^2 + y - 1)$ $a = (1,e)$
4. $f(x,y) = \sqrt{xy - x + 2y - 2}$ $a = (1,2)$

Exercice fo.5

Donner une valeur approchée de f au point X_0

1. $f(x,y)=\sqrt{4x-x^2+4y-y^2}$ et $X_0=(1{,}98\,;0{,}01)$
2. $f(x,y)=\dfrac{2x^2-3y^2}{x^2y+y^2}$ et $X_0=(0{,}95\,;1{,}02)$
3. $f(x,y)=x^{\frac{1}{5}}.y^{\frac{4}{5}}$ et $X_0=(10{,}1\,;9{,}95)$

Exercice fo.6

Calculer les dérivées partielles premières et secondes de f après avoir précisé le domaine de définition.

1. $f(x,y)=xy+\ln(x)\ln(y)$
2. $f(x,y)=\dfrac{y}{x+y}$
3. $f(x,y)=\dfrac{e^{-x}}{y-a},\ a\in\mathbb{R}$

Exercice fo.7

Étudier, quand c'est possible, les extrema locaux des fonctions suivantes :

1. $f(x,y)=x^3+x^2-xy+y^2+4$
2. $f(x,y)=e^x+e^y+e^{-x-y}$
3. $f(x,y)=-x^2+x-xy+y-y^2$.
4. $f(x,y)=(x^2+y^2)e^{x^2-y^2}$.
5. $f(x,y)=\dfrac{x^2y}{2}+x^2+\dfrac{y^3}{3}-4y$

Exercice fo.8

En utilisant la méthode par substitution, déterminer les extrema des fonctions suivantes soumises chacune à la contrainte d'égalité indiquée :

1. $f(x,y)=xy$ sous la contrainte $x-e^y=0$.

2. $f(x,y)=x^2-2xy$ sous la contrainte $x+y=1$.

Reprendre la question en utilisant la méthode de Lagrange.

Exercice fo.9

En utilisant la méthode de votre choix, déterminer les extrema des fonctions suivantes soumises aux contraintes suivantes :

1. $f(x,y) = x^2 - 3y^2$ sous la contrainte $x + 2y - 1 = 0$.
2. $f(x,y) = x - 2y$ sous la contrainte $x^2 + y^2 = 1$.

Exercice fo.10

Optimiser la fonction de Cobb-Douglas f(K,L) = $K^{0,4}L^{0,5}$ sous la contrainte 3K+ 4L = 108.

Exercice fo.11

1) Quelle combinaison des biens x et y doit produire une entreprise pour minimiser ses coûts lorsque sa fonction coût est $C(x,y) = 6x^2 + 10y^2 - xy + 30$ et lorsque la production est soumise à la contrainte x + y = 34 ?
2) Quelle combinaison des produits x et y doit fabriquer une entreprise pour maximiser ses profits lorsque sa fonction profit est $f(x,y) = 80x - 2x^2 - xy - 3y^2 + 100y$ et lorsque la capacité maximale de production est x + y = 12 ?

Exercice fo.12

Déterminer les extrema de la fonction d'utilité $U(x,y) = xy^{1/3}$ sous la contrainte budgétaire $x + 3y = 12$.

Exercice fo.13

Si x et y milliers d'euros sont dépensés en travail et en équipement, une usine produit $Q(x,y) = 50x^{1/2}y^2$ unités d'un bien.
L'entreprise dispose d'une enveloppe de 80 000 €.
Comment cette somme doit-elle être répartie entre le travail et l'équipement afin que le niveau de production soit le plus élevé possible ?