Ci-dessous la correction des exercices supplémentaires sur les chapitres 2 et 3. Cette correction ayant été tapée plus que rapidement et n'ayant pas été relue, il se peut que des erreurs de calcul y figurent...

Chapitre 2

Exercice 1

On considère u_n la suite dont le terme général est donné ci-dessous. Étudier la nature de la série $\sum u_n$ (convergente, divergente) dans chaque cas.

1. $u_n = \dfrac{7n^2+5}{n^3+2}, n \geq 0$
2. $u_n = \left(\dfrac{3}{n}\right)^n, n > 0$
3. $u_n = \begin{cases} \dfrac{1}{3^k} \text{ si } n = 2k, \\ \dfrac{2}{3^{k+1}} \text{ si } n = 2k+1 \end{cases}$
4. $u_n = \left(\dfrac{2n+1}{5n+4}\right)^n, n \geq 0$

Correction :

1. $u_n = \dfrac{7n^2+5}{n^3+2}, n \geq 0$

   On utilise un équivalent. Quand $n \to \infty$, $u_n \underset{\infty}{\sim} \dfrac{7n^2}{n^3} = \dfrac{7}{n} = v_n$

   u_n étant positive pour $n > 0$, $\sum u_n$ et $\sum v_n$, ont la même nature.

   $v_n = \dfrac{7}{n}$ est le terme général positif d'une série de Riemann divergente ($a = 1$).

   $\sum u_n$ diverge.

2. $u_n = \left(\dfrac{3}{n}\right)^n, n > 0$

   La présence d'un exposant n nous invite à utiliser un critère de Cauchy.

   $(u_n)^{\frac{1}{n}} = \dfrac{3}{n}$ dont la limite en $+\infty$ est nulle. Aussi $\sum u_n$ converge d'après le critère de Cauchy

3. $u_n = \begin{cases} \dfrac{1}{3^k} \text{ si } n = 2k, \\ \dfrac{2}{3^{k+1}} \text{ si } n = 2k+1 \end{cases}$

   On peut utiliser un critère de d'Alembert.

   Si n est pair $n = 2k$ et alors, $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{\frac{2}{3^{k+1}}}{\frac{1}{3^k}} = \dfrac{2}{3}$.

   Si n est impair $n = 2k+1$, $n+1 = 2k+2 = 2(k+1)$ et alors, $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{\frac{1}{3^{k+1}}}{\frac{2}{3^{k+1}}} = \dfrac{1}{2}$.

   Dans tous les cas $0 < \dfrac{u_{n+1}}{u_n} < 1$ mais *attention*, ce rapport ne converge pas...

   La version du critère de d'Alembert dont vous disposez ne s'applique pas exactement... Néanmoins, le critère reste juste dans ce cas et la série $\sum u_n$ converge.

4. $u_n = \left(\dfrac{2n+1}{5n+4}\right)^n, n \geq 0$

   La présence d'un exposant n nous invite une fois encore à appliquer un critère de Cauchy. On obtient $u_n^{\frac{1}{n}} = \dfrac{2n+1}{5n+4}$ qui tend vers $\dfrac{2}{5} \in]0;1[$ en $+\infty$.

   Donc $\sum u_n$ converge.

Chapitre 3

Exercice 2

Calculer les intégrales suivantes :

- $I = \displaystyle\int_2^5 \frac{x}{(2x^2-3)^4}dx$
- $J = \displaystyle\int_2^4 (x^2+x)e^{2x^3+3x^2+1}dx$

Correction :

- $I = \displaystyle\int_2^5 \frac{x}{(2x^2-3)^4}dx = \left[\frac{1}{-3\times 4}(2x^2-3)^{-3}\right]_1^5 = -\frac{1}{12}\left(\frac{1}{47^3} - \frac{1}{5^3}\right)$

  On a appliqué $\displaystyle\int u'u^n = \frac{u^{n+1}}{n+1}$ avec $u(x) = 2x^2-3, u'(x) = 4x$ et $n = -4$
- $J = \displaystyle\int_2^4 (x^2+x)e^{2x^3+3x^2+1}dx = \left[\frac{1}{6}e^{2x^3+3x^2+1}\right]_2^4 = \frac{1}{6}(e^{177} - e^{29})$

Exercice 3

Calculer la valeur moyenne de la fonction $f(x) = (x-2)e^{x+1}$ pour x évoluant entre 3 et 7.
On utilisera une intégration par parties.

Correction :
La valeur moyenne est $V_m = \displaystyle\frac{1}{7-3}\int_3^7 (x-2)e^{x+1}dx = \frac{1}{4}\int_3^7 (x-2)e^{x+1}dx$
On utilise une IPP avec :
$u'(x) = e^{x+1}$ donc $u(x) = e^{x+1}$
$v(x) = x-2$ donc $v'(x) = 1$
Donc $V_m = \displaystyle\frac{1}{4}\left(\left[(x-2)e^{x+1}\right]_3^7 - \int_3^7 e^{x+1}\right) = \frac{1}{4}\left(5e^8 - e^4 - \left[e^{x+1}\right]_3^7\right) = e^8$

Exercice 4

À l'aide d'une intégration par parties, calculer $\displaystyle\int_1^e \ln^2(x)dx$

Correction :
$I = \displaystyle\int_1^e \ln^2(x)dx$
On réalise une IPP avec :
$u(x) = \ln^2 x$ donc $u'(x) = 2\dfrac{\ln x}{x}$
$v'(x) = 1$ donc $v(x) = x$
On a donc :
$I = \left[x\ln^2 x\right]_1^e - \displaystyle\int_1^e 2\frac{x\ln x}{x}dx = e - 2\int_1^e \ln(x)dx$
On refait une IPP pour calculer cette dernière intégrale.
$u(x) = \ln x$ donc $u'(x) = \dfrac{1}{x}$
$v'(x) = 1$ donc $v(x) = x$
$I = e - 2\left[x\ln x\right]_1^e + \displaystyle\int_1^e \frac{x}{x}dx = e - 2e + [1]_1^e = -1$

Exercice 5

À l'aide du changement de variable $y = x^3$ calculer $I = \displaystyle\int_2^5 \frac{x^2}{x^3+4}dx$.
Remarque : il est possible de calculer I directement mais l'énoncé stipule d'utiliser un changement de variables
Correction :
On a $y = x^3$ et on réalise un changement de variables
donc :

- $y = x^3$ donc $dy = 3x^2dx \Longleftrightarrow \dfrac{dy}{3} = x^2dx$
- $x = 2$ lorsque $y = 8$
- $x = 5$ lorsque $y = 125$

$I = \displaystyle\int_8^{125} \frac{dy}{3(y+4)} = \frac{1}{3}[\ln(y+4)]_8^{125} = \frac{1}{3}\ln\left(\frac{129}{12}\right) = \frac{1}{3}\ln\left(\frac{43}{4}\right)$