Année universitaire 2023-2024

LICENCE ÉCONOMIE ET GESTION, 2e année

Math3

1er devoir — 18 novembre 2023

CORRECTION

Exercice A

Calculez les intégrales suivantes :

1. $I_1 = \int_1^2 4x^3 - 6x^2 + 2x + 1 \,\mathrm{d}x$;
2. $I_2 = \int_0^1 \frac{6x^2+4}{x^3+2x+1} \,\mathrm{d}x$;
3. $I_3 = \int_0^1 (6x-3)\,\mathrm{e}^{x^2-x} \,\mathrm{d}x$.
4. $I_4 = \int_0^1 \frac{3x^2+4x}{(x^3+2x^2+1)^3} \,\mathrm{d}x$

Détails du barème de l'exercice A sur 7 points

1. ***(total** 1 **point)** ;*
2. 0,5 *pour la vérification de la dérivée,* 0,5 *pour le signe de l'argument du log,* 1 *pour le reste* ***(total** 2 **points)** ;*
3. 0,5 *pour la vérification de la dérivée,* 1,5 *pour le reste* ***(total** 2 **points)** ;*
4. idem.

1. $I_1 = \displaystyle\int_1^2 4x^3 - 6x^2 + 2x + 1 \,\mathrm{d}x = \left[x^4 - 2x^3 + x^2 + x\right]_1^2 = 6 - 1 = 5.$
2. On a $\left(x^3+2x+1\right)' = 3x^2+2$ et $x^3+2x+1 \geqslant 0$ pour $x \in [0,1]$.

   Donc $I_2 = 2\displaystyle\int_0^1 \frac{3x^2+2}{x^3+2x+1}\,\mathrm{d}x = 2\left[\ln\left(x^3+2x+1\right)\right]_0^1 = 2(\ln 4 - \ln 1) = 2\ln 4.$
3. On a $\left(x^2-x\right)' = 2x-1$.

   Donc $I_3 = 3\displaystyle\int_0^1 (2x-1)\,\mathrm{e}^{x^2-x}\,\mathrm{d}x = 3\left[\mathrm{e}^{x^2-x}\right]_0^1 = 3\left(\mathrm{e}^0 - \mathrm{e}^0\right) = 0.$
4. On a $\left(x^3+2x^2+1\right)' = 3x^2+4x$.

   Donc $I_4 = \displaystyle\int_0^1 \left(3x^2+4x\right)\left(x^3+2x^2+1\right)^{-3}\,\mathrm{d}x = \left[-\frac{1}{2}\left(x^3+2x^2+1\right)^{-2}\right]_0^1 = -\frac{1}{32} + \frac{1}{2} = \frac{15}{32}.$

Exercice B

À l'aide du changement de variable $u = \sqrt{x-1}$, calculez $I = \int_2^5 x\sqrt{x-1}\,\mathrm{d}x$.

Détails du barème de l'exercice B sur 4 points

1 *point pour le calcul des bornes,* 1 *point pour le calcul du* du*,* 1 *point pour l'expression correcte avec* u*,* 1 *point pour la fin du calcul* ***(total*** 4 ***points)***

Si $u(x) = u = \sqrt{x-1}$ alors $x = u^2+1$ d'où $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}u} = 2u$ et, enfin, $\mathrm{d}x = 2u\mathrm{d}u$.

Par ailleurs, $u(2) = \sqrt{2-1} = 1$ et $u(5) = \sqrt{5-1} = 2$.

On a donc $I = \displaystyle\int_1^2 (u^2+1)u(2u)\,\mathrm{d}u = \int_1^2 2u^4 + 2u^2\,\mathrm{d}u = 2\left[\frac{u^5}{5} + \frac{u^3}{3}\right]_1^2 = 2\left(\frac{136}{15} - \frac{8}{15}\right) = \frac{256}{15}$.

Exercice C

Calculez à l'aide d'une intégration par partie $I = \int_1^{\mathrm{e}} 9x^2 \ln(x)\,\mathrm{d}x$.

Détails du barème de l'exercice C sur 4 points

1 *point pour l'identification de* u' *et* v*,* 1 *point pour le calcul de* u *et* v'*,* 2 *points pour le reste dont* 0,5 *pour la formule de l'IPP* même implicite ***(total*** 4 ***points)***

$$\begin{array}{l|l} u' = 9x^2 & u = 3x^3 \\ v = \ln(x) & v' = \dfrac{1}{x} \end{array}$$

D'où $I = \left[3x^3\ln(x)\right]_1^{\mathrm{e}} - \displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} 3x^3\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = 3\mathrm{e}^3 - 0 - \int_1^{\mathrm{e}} 3x^2\,\mathrm{d}x = 3\mathrm{e}^3 - \left[x^3\right]_1^{\mathrm{e}} = 3\mathrm{e}^3 - \left(\mathrm{e}^3 - 1\right) = 2\mathrm{e}^3 + 1$.

Exercice D

Dans chaque cas, étudiez la convergence de la série de terme général U_n et, si possible, calculez en la somme :

1. $U_n = \dfrac{4}{3^n}$; 2. $U_n = \dfrac{3n+4}{5n+1}$; 3. $U_n = \dfrac{n^3}{n!}$; 4. $U_n = \left(\dfrac{5n+2}{2n+1}\right)^n$; 5. $U_n = \dfrac{3n+5n^2}{n^3}$.

Détails du barème de l'exercice D sur 5 points

1 *point par série* ***(total*** 5 ***points)***

1. $U_n = 4\left(\dfrac{1}{3}\right)^n$ donc la série est géométrique de raison $\dfrac{1}{3}$.

   Comme $-1 < \dfrac{1}{3} < 1$, la série converge.

   On peut en calculer la somme : $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{4}{3^n} = 4\frac{1}{1-\frac{1}{3}} = 6$.

2. $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} U_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{3n}{5n} = \frac{3}{5} \neq 0$ donc la série est grossièrement divergente.

3. La série est à termes positifs. Avec le critère de d'Alembert.

$$\frac{U_{n+1}}{U_n} = \frac{(n+1)^3}{(n+1)!}\frac{n!}{n^3} = \frac{(n+1)^3}{n^3}\frac{n!}{(n+1)!} = \frac{(n+1)^3}{n^3}\frac{1}{n+1} = \frac{(n+1)^2}{n^3}$$

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{U_{n+1}}{U_n} = \lim_{n\to+\infty}\frac{(n+1)^2}{n^3} = \lim_{n\to+\infty}\frac{n^2}{n^3} = \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n} = 0 < 1$$

   donc la série converge.

4. La série est à termes positifs. Avec le critère de Cauchy.

$$\sqrt[n]{U_n} = \frac{5n+2}{2n+1} \qquad \lim_{n\to+\infty}\frac{5n+2}{2n+1} = \frac{5}{2}$$

   et comme $\frac{5}{2} > 1$ la série diverge.

5. $U_n = 3\dfrac{n}{n^3} + 5\dfrac{n^2}{n^3} = 3\dfrac{1}{n^2} + 5\dfrac{1}{n}$.

   La série de terme général $\frac{1}{n^2}$ est une série de Riemann convergente.

   La série de terme général $\frac{1}{n}$ est une série de Riemann divergente. *C'est la série harmonique.*

   La série de terme général U_n est donc divergente.