

L253 SG 17/10/2026

La visio commence à 9h45

⊗ Exercice 13. Calculer, à l'aide d'une intégration par parties, les intégrales suivantes :

$$A = \int_0^3 x \sqrt{3-x} dx, \quad B = \int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{(1+x)^2} dx, \quad C = \int_0^{-1} (2x^2 + 1) e^{3x} dx.$$

$$A : \int_0^3 x \sqrt{3-x} dx \quad \text{par IPP}$$

$$\int u' u^n = \frac{u^{n+1}}{n+1}$$

$$u' = \sqrt{3-x} = (3-x)^{1/2}$$

$$u = - \frac{(3-x)^{3/2}}{3/2} = -\frac{2}{3} (3-x)^{3/2}$$

$$v = x$$

$$v' = 1$$

$$\text{IPP} \quad \int u' v = [u v] - \int u v'$$

Recette : pol x puissance

IPP → dériver la pol.

$$A : \left[-\frac{2}{3} x (3-x)^{3/2} \right]_0^3 + \frac{2}{3} \int_0^3 (3-x)^{3/2} dx$$

$$A = 0 - 0 + \frac{2}{3} \left[-\frac{2}{5} (3-x)^{5/2} \right]_0^3 = -\frac{2}{3} \cdot \frac{2}{5} \left(0 - 3^{5/2} \right)$$

$$A = \frac{4}{5} \times \frac{1}{3} \cdot 3^{5/2} = \frac{4}{5} \times 3^{3/2} = \frac{4}{5} \times 3 \times 3^{1/2} = \frac{12}{5} \sqrt{3}.$$

$$B : \int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{(1+x)^2} dx$$

IPP

Recette $\frac{\ln}{\text{pol}}$ IPP
dériver ln

$$u' = (1+x)^{-2}$$

$$u = - (1+x)^{-1}$$

$$v = \ln(1+x)$$

$$v' = \frac{1}{1+x}$$

$$B : \left[-\frac{\ln(1+x)}{1+x} \right]_0^1 + \int_0^1 (1+x)^{-2} dx$$

$$B = \frac{-\ln(2)}{2} - 0 + \left[- (1+x)^{-1} \right]_0^1 = -\frac{\ln 2}{2} - \frac{1}{2} + 1 = \frac{1 - \ln 2}{2}$$

$$C = \int_0^{-1} (2x^2 + 1) e^{3x} dx \quad \text{IPP}$$

Recette pol. exp IPP
dérivée le pol.

$$u' = e^{3x}$$

$$u = \frac{1}{3} e^{3x}$$

$$v = 2x^2 + 1$$

$$v' = 4x$$

$$C = \left[\frac{1}{3} (2x^2 + 1) e^{3x} \right]_0^{-1} - \frac{4}{3} \int_0^{-1} x e^{3x} dx$$

$$C = e^{-3} - \frac{1}{3} - \frac{4}{3} D$$

$$D = \int_0^{-1} x e^{3x} dx \quad \text{2ème IPP}$$

$$u' = e^{3x}$$

$$u = \frac{1}{3} e^{3x}$$

$$v = x$$

$$v' = 1$$

on a confirmation
d'avoir fait les
bons choix...

$$D = \left[\frac{x}{3} e^{3x} \right]_0^{-1} - \frac{1}{3} \int_0^{-1} e^{3x} dx = \frac{-e^{-3}}{3} - 0 - \frac{1}{3} \left[\frac{1}{3} e^{3x} \right]_0^{-1}$$

$$D = \frac{-e^{-3}}{3} - \frac{1}{9} e^{-3} + \frac{1}{9} = \frac{1}{9} - \frac{4}{9} e^{-3}$$

$$C = e^{-3} - \frac{1}{3} - \frac{4}{3} \left(\frac{1}{9} - \frac{4}{9} e^{-3} \right) = \left(1 + \frac{16}{27} \right) e^{-3} - \frac{9}{27} - \frac{4}{27}$$

calculatrice...

$$C = \frac{43}{27} e^{-3} - \frac{13}{27} \approx 0,402$$

Fin du ch 2

Ch 3 : Fonctions de 2 variables

1 variable

$$f: \mathcal{D} \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto f(x)$$

Ex $f(x) = \frac{1}{1-x}$
 $\mathcal{D} =]-\infty; 1[\cup]1; +\infty[$

2 variables

$$f: \mathcal{D} \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$(x, y) \longmapsto f(x, y)$$

Ex $f(x) = \frac{1}{x+y}$
 $\mathcal{D} = \mathbb{R}^2 \setminus \{y = -x\}$

objectif : optimisation $\longrightarrow$ sous contrainte linéaire $\leftarrow$ L152
ou $\longrightarrow$ linéaire $\leftarrow$ nouveau ! non linéaire

Ex : $f(K, L) = 17 K^{\frac{1}{4}} L^{\frac{3}{4}}$: la CA se fct du capital, travail
contrainte possible $\bullet K + L = 30$

maximiser $f(K, L)$ sous la contrainte

$\bullet K^2 + L^2 = 1$ non linéaire $\rightarrow$ Lagrangien (dm)

ou ... aucune contrainte !

- ⊗ **Exercice 14.** Soit f définie par $f(x,y) = x^4 + 2x^3y + 3x^2y^2 - xy^3$.
 Déterminer le développement limité à l'ordre 2 de f au point $A = (1;1)$.
 En déduire une valeur approchée de f au point $B = (1.1;1.1)$.

f polynôme en (x,y) défini et 2 fois dérivable sur $\mathbb{R}^2$
 et on a $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^2)$.

$\Rightarrow f$ admet un DL₂ en tout pt de $\mathbb{R}^2$.

$$f(x,y) = x^4 + 2x^3y + 3x^2y^2 - xy^3$$

Dérivées
partielles
du 1^{er} ordre

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 4x^3 + 6x^2y + 6xy^2 - y^3$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2x^3 + 6x^2y - 3xy^2$$

Dérivées
partielles
du 2nd ordre

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial x} (4x^3 + 6x^2y + 6xy^2 - y^3)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 12x^2 + 12xy + 6y^2$$

Th de Schwarz $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ car $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^2)$

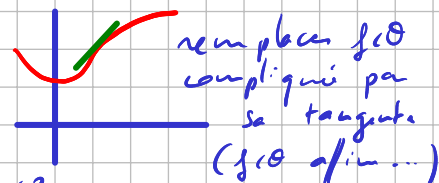
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial x} (2x^3 + 6x^2y - 3xy^2)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 6x^2 + 12y - 3y^2$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial y} (2x^3 + 6x^2y - 3xy^2)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 6x^2 - 6xy$$

DL 1 en 1 variable



Développement limité de f à l'ordre 2...

↗ on remplace f par le meilleur polynôme de degré 2

$H(h,k)$ autour de A

$$f(A+H) = f(A) + \underbrace{h \frac{\partial f}{\partial x}(A) + k \frac{\partial f}{\partial y}(A)}_{\text{DL}_1 f(A)} + \underbrace{\frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(A) h^2 + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(A) hk + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(A) k^2 \right)}_{\text{partie 2 du DL}} + \underbrace{\|H\|^2 \varepsilon(H)}_{\text{reste qui tend } \rightarrow 0 \text{ plus vite que } \|H\|^2}$$

↗ écrit
entre A et
un voisin

$$\|H\|^2 = \text{norme de } H = h^2 + k^2$$

$$\varepsilon(H) \rightarrow 0$$

$$\|H\| \rightarrow 0$$

$$f(A) = 5$$

$$\underline{\underline{A(1;1)}}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(A) = 15$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(A) = 5$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(A) = 30$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(A) = 15$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(A) = 0$$

DL₂ f(A):

$$f(A+H) = 5 + 15h + 5k + \frac{1}{2} \left(30h^2 + \overset{30}{2 \cdot 15}hk + 0k^2 \right) + \|H\|^2 \varepsilon(H).$$

Pour B(1,1; 1,1) voisin de A(1;1)

Valeurs approchées en B : écart $H(\overset{h}{0,1}; \overset{k}{0,1})$

$$f(1,1; 1,1) \simeq 5 + 15 \times 0,1 + 5 \times 0,1 + \frac{1}{2} (30 \times 0,01 + 2 \cdot 15 \times 0,01) + \|H\|^2 \varepsilon(H)$$

~~pour B(1,1)~~
pour B(1,1)

$$f(1,1; 1,1) \simeq 5 + 2 + 0,3 = 7,3 \quad \square$$

$$f(B) \simeq 7,3.$$