

L253 56 17/10/2026

La visio commence à 8h

⊗ Exercice 13. Calculer, à l'aide d'une intégration par parties, les intégrales suivantes :

$$A = \int_0^3 x \sqrt{3-x} \, dx, \quad B = \int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{(1+x)^2} \, dx, \quad C = \int_0^{-1} (2x^2 + 1) e^{3x} \, dx.$$

$$A = \int_0^3 x \sqrt{3-x} \, dx$$

IPP

Recette : pol. puissance de x
(↑ l'exp.) → dériver le polynôme

$$u = x$$

$$u' = 1$$

$$v' = \sqrt{3-x} = (3-x)^{\frac{1}{2}}$$

$$v = \frac{(3-x)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} = -\frac{2}{3} (3-x)^{\frac{3}{2}}$$

$$\int u' \cdot u^n = \frac{u^{n+1}}{n+1}$$

$$\int u v' = [u v] - \int u' v$$

$$A = \left[x \cdot \left(-\frac{2}{3}\right) \cdot (3-x)^{\frac{3}{2}} \right]_0^3 - \int_0^3 -\frac{2}{3} (3-x)^{\frac{3}{2}} \, dx$$

$$A = 0 - 0 + \frac{2}{3} \int_0^3 (3-x)^{\frac{3}{2}} \, dx = \frac{2}{3} \left[-\frac{2}{5} (3-x)^{\frac{5}{2}} \right]_0^3$$

$$A = -\frac{4}{15} \left(0 - 3^{\frac{5}{2}} \right) = \frac{4}{15} \cdot 3^{\frac{5}{2}} = \frac{4}{3 \times 5} \times 3^{\frac{5}{2}} = \frac{4}{5} \times 3^{\frac{3}{2}}$$

$$A = \frac{4}{5} \sqrt{27} = \frac{4}{5} \sqrt{9 \times 3} = \frac{3 \times 4}{5} \sqrt{3} = \frac{12}{5} \sqrt{3}.$$

$$B = \int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{(1+x)^2} \, dx$$

IPP

$$u = \ln(1+x)$$

$$u' = \frac{1}{1+x}$$

$$v' = (1+x)^{-2}$$

$$v = -(1+x)^{-1}$$

$$B = \left[-\frac{\ln(1+x)}{1+x} \right]_0^1 + \int_0^1 \frac{1}{(1+x)^2} \, dx$$

$$B = -\frac{\ln 2}{2} + \left[-\frac{1}{1+x} \right]_0^1 = -\frac{\ln 2}{2} - \frac{1}{2} + 1 = \frac{1 - \ln 2}{2}.$$

$$C = \int_0^{-1} (2x^2 + 1) e^{3x} dx \quad \text{IPP} \quad \begin{array}{l} u' = e^{3x} \\ v = 2x^2 + 1 \\ v' = 4x \end{array} \quad \begin{array}{l} u = \frac{1}{3} e^{3x} \\ v' = 4x \end{array}$$

$$C = \left[\frac{1}{3} (2x^2 + 1) e^{3x} \right]_0^{-1} - \underbrace{\frac{4}{3} \int_0^{-1} x e^{3x} dx}_{\mathcal{D}}$$

$$C = e^{-3} - \frac{1}{3} - \frac{4}{3} \mathcal{D}$$

$$\text{et } \mathcal{D} = \int_0^{-1} x e^{3x} dx \quad \text{2ème IPP} \quad \begin{array}{l} u' = e^{3x} \\ v = x \\ v' = 1 \end{array} \quad \begin{array}{l} u = \frac{1}{3} e^{3x} \\ v' = 1 \end{array}$$

$$\mathcal{D} = \left[\frac{1}{3} x e^{3x} \right]_0^{-1} - \frac{1}{3} \int_0^{-1} e^{3x} dx = -\frac{e^{-3}}{3} - \frac{1}{3} \left[\frac{1}{3} e^{3x} \right]_0^{-1}$$

$$\mathcal{D} = -\frac{e^{-3}}{3} - \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{3} e^{-3} - \frac{1}{3} \right)$$

$$C = e^{-3} - \frac{1}{3} - \frac{4}{3} \left(-\frac{e^{-3}}{3} - \frac{1}{9} e^{-3} + \frac{1}{9} \right) \quad \text{calculatrice}$$

$$C = \frac{67}{27} e^{-3} - \frac{13}{27}$$

ch 3: Fonctions de 2 variables.

• bcp de rappels de L1

$$\begin{aligned} f(x, y) &= z \\ \mathcal{D} \subset \mathbb{R}^2 &\quad \mathbb{R} \end{aligned} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{aligned} f: \mathcal{D} \subset \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\longmapsto f(x, y) \end{aligned}$$

Ex 1) $\mathcal{D} = [0, 1] \times [0, 1]$

$$f(x, y) = 2x^2 + 2y^2$$

2) $\mathcal{D} =]0; +\infty[\times]0; +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$
 $(K, L) \longmapsto \frac{1}{3} K^{\frac{1}{3}} L^{-\frac{1}{3}}$

objectif: optimiser lié *nouveau*

constraint $\longrightarrow$ Ex $K + L = 14$

déterminer (K, L) ou (x, y)

ou $K^2 + L^2 = 1$ *nouveau*

rendant f maximal/minimal

- * **Exercice 14.** Soit f définie par $f(x,y) = x^4 + 2x^3y + 3x^2y^2 - xy^3$.
 Déterminer le développement limité à l'ordre 2 de f au point $A = (1;1)$.
 En déduire une valeur approchée de f au point $B = (1.1; 1.1)$.

f polynôme défini et dérivable 2 fois sur $\mathbb{R}^2$

Dérivées partielles

$$\underline{1^{er} \text{ ordre}} \quad \bullet \quad \frac{\partial f}{\partial x} = 4x^3 + 6x^2y + 6xy^2 - y^3 \quad \bullet \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 2x^3 + 6x^2y - 3xy^2$$

$$\underline{2^{nd} \text{ ordre}} \quad \bullet \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial x} (4x^3 + 6x^2y + 6xy^2 - y^3) = 12x^2 + 12xy + 6y^2$$

$$\bullet \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial x} (2x^3 + 6x^2y - 3xy^2)$$

Th de Schwarz ($f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^n)$)

$$= \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 6x^2 + 12xy - 3y^2$$

$$\bullet \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial y} (2x^3 + 6x^2y - 3xy^2) = 6x^2 - 6xy$$

$$\text{En } A(1;1) : f(1,1) = 5$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(A) = 15$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(A) = 5$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(A) = 30$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(A) = 15$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(A) = 0$$

$DL_2 f(A)$: le développement limité de f en A :

$H(h, k)$

$$f(A+H) = f(A) + \frac{\partial f}{\partial x}(A)h + \frac{\partial f}{\partial y}(A)k + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(A)h^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(A)hk + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(A)k^2 \right) + \|H\|^2 \varepsilon(H)$$

$$\text{soit } \lim_{H \rightarrow 0} \varepsilon(H) = 0$$

$$f(A+H) = 5 + 15h + 5k + \frac{1}{2} (30h^2 + 30hk) + \|H\|^2 \varepsilon(H) : DL_2 f(A)$$

$$A+H=B=(1,1;1,1) \Rightarrow H=(0,1;0,1)$$

$$f(1,1;1,1) \simeq 5 + 15 \times 0,1 + 5 \times 0,1 + \frac{1}{2} (30 \times 0,01 + 2 \times 15 \times 0,01 + 0)$$

$$f(1,1;1,1) \simeq 5 + 2 + \frac{1}{2} \times 2 \times 0,3 \simeq 7,3.$$