

L253 SG 17/10/2026

La visio commence à 11h30

* Exercice 13. Calculer, à l'aide d'une intégration par parties, les intégrales suivantes :

$$A = \int_0^3 x \sqrt{3-x} dx, \quad B = \int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{(1+x)^2} dx, \quad C = \int_0^{-1} (2x^2 + 1) e^{3x} dx.$$

IPP

$$\int u'v = [uv] - \int uv'$$

Rechte

IPP pol x puissance
→ dériver polynôme

$$A = \int_0^3 x \sqrt{3-x} dx$$

$(3-x)^{1/2}$
une puissance

$$u = x$$

$$v = (3-x)^{1/2}$$

$$u = \frac{x^2}{2}$$

$$v' = (3-x)^{-1/2}$$

$\left\{ \begin{array}{l} uv' \text{ compliqué} \end{array} \right.$

$$\int u' u^n = \frac{u^{n+1}}{n+1}$$

$$u' = (3-x)^{1/2}$$

$$v = x$$

$$\left. \begin{array}{l} u = -\frac{(3-x)^{3/2}}{3/2} = -\frac{2}{3}(3-x)^{3/2} \\ v' = 1 \end{array} \right\} uv' \text{ on peut l'intégrer}$$

$$A = \left[-\frac{2}{3} x (3-x)^{3/2} \right]_0^3 + \frac{2}{3} \int_0^3 (3-x)^{3/2} dx$$

$$A = 0 - 0 + \frac{2}{3} \left[-\frac{2}{5} (3-x)^{5/2} \right]_0^3 = \frac{4}{3 \times 5} 3^{5/2} = \frac{4}{5} \times 3^{3/2} = \frac{4}{5} \times 3 \times 3^{1/2}$$

$$A = \frac{12}{5} \sqrt{3}$$

$$B = \int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{(1+x)^2} dx$$

IPP

Rechte $\ln \times \text{une}$

→ dériver $\ln$

$$u' = (1+x)^{-2}$$

$$v = \ln(1+x)$$

$$u = -(1+x)^{-1}$$

$$v' = \frac{1}{1+x}$$

$$B = \left[-\frac{\ln(1+x)}{1+x} \right]_0^1 + \int_0^1 (1+x)^{-2} dx$$

$$B = -\frac{\ln 2}{2} - 0 + \left[-(1+x)^{-1} \right]_0^1 = -\frac{\ln 2}{2} - \frac{1}{2} + 1 = \frac{1 - \ln 2}{2}$$

$$C = \int_0^{-1} (2x^2 + 1) e^{3x} dx$$

I P P

Rechte pol x exp
deriver pol.

$$u' = e^{3x}$$

$$u = \frac{1}{3} e^{3x}$$

$$v = 2x^2 + 1$$

$$v' = 4x$$

} encore pol x exp ... encore une I P P

$$C = \left[\frac{1}{3} (2x^2 + 1) e^{3x} \right]_0^{-1} - \frac{4}{3} \int_0^{-1} x e^{3x} dx = D$$

$$C = e^{-3} - \frac{1}{3} - \frac{4}{3} D$$

$$D = \int_0^{-1} x e^{3x} dx$$

I P P

$$u' = e^{3x}$$

$$u = \frac{1}{3} e^{3x}$$

$$v = x$$

$$v' = 1$$

? →

$$D = \left[\frac{x}{3} e^{3x} \right]_0^{-1} - \frac{1}{3} \int_0^{-1} e^{3x} dx = \frac{-e^{-3}}{3} - 0 - \frac{1}{3} \left[\frac{1}{3} e^{3x} \right]_0^{-1}$$

$$D = \frac{-e^{-3}}{3} - \frac{1}{3} \left(\frac{e^{-3}}{3} - \frac{1}{3} \right) = -\frac{4}{9} e^{-3} + \frac{1}{9}$$

$$\text{Donc: } C = e^{-3} - \frac{1}{3} - \frac{4}{3} \left(-\frac{4}{9} e^{-3} + \frac{1}{9} \right)$$

$$C = e^{-3} \left(1 + \frac{16}{27} \right) - \frac{1}{3} - \frac{4}{27} = \frac{43}{27} e^{-3} - \frac{13}{27} \approx 0,402.$$

ch 3 Fonctions de 2 variables

• suite de L1S2

1 variable

$$f: \mathcal{D} \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto f(x)$$

2 variables

$$f: \mathcal{D} \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) \mapsto f(x, y)$$

Ex

$$f: [0; 1] \times [0; 1] \rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) \mapsto x^2 + 2y - 3$$

But optimiser

• contrainte $\rightarrow$ linéaire $3x + 2y = 14$

outil

DL2 $f(A)$

$\rightarrow$ non linéaire. $x^2 + y^2 = 1$

• libu

$$f(K, L) = 3 K^{\frac{1}{4}} L^{\frac{3}{4}}$$

à maximiser sous la contrainte $K + L = 16$

- ⊗ **Exercice 14.** Soit f définie par $f(x,y) = x^4 + 2x^3y + 3x^2y^2 - xy^3$.
 Déterminer le développement limité à l'ordre 2 de f au point $A = (1; 1)$.
 En déduire une valeur approchée de f au point $B = (1.1; 1.1)$.

$$f(x,y) = x^4 + 2x^3y + 3x^2y^2 - xy^3 \quad \text{polynôme de degré 4}$$

$$D_f = \mathbb{R}^2 \quad \text{et} \quad f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^2)$$

Dérivées partielles 1^{er} ordre

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} (x^4 + 2x^3y + 3x^2y^2 - xy^3)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 4x^3 + 6x^2y + 6xy^2 - y^3$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} (x^4 + 2x^3y + 3x^2y^2 - xy^3)$$

← $\frac{\partial}{\partial y} \rightarrow x$ est constant

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2x^3 + 6x^2y - 3xy^2$$

Dérivées partielles du 2nd ordre

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial x} (4x^3 + 6x^2y + 6xy^2 - y^3)$$

$$\bullet \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 12x^2 + 12xy + 6y^2$$

$$f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^2) \Rightarrow \text{Th de Schwarz} : \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial x} (2x^3 + 6x^2y - 3xy^2)$$

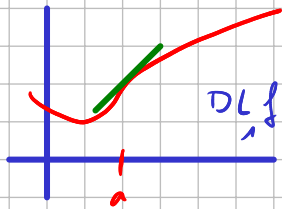
$$\bullet \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 6x^2 + 12xy - 3y^2$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial y} (2x^3 + 6x^2y - 3xy^2)$$

$$\bullet \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 6x^2 - 6xy$$

1 variable

DL₁

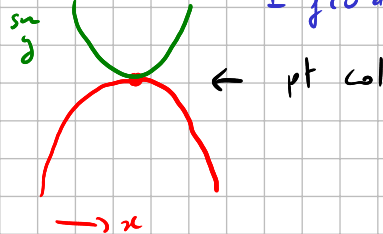


DL₁ f(A) → remplace
f par sa tangente
ou f(x) par une f.c. affine.

2 variable

remplace une surf.
par un plan

DL₂ remplace f(x) par
1 f.c. de 2nd degré



→ Convexité

DL₂ f(A)

H(h, k) : écart autour de A

reste qui → 0 plus
vite que ||H||²

$$f(A+H) = f(A) + \underbrace{\frac{\partial f}{\partial x}(A)h + \frac{\partial f}{\partial y}(A)k}_{1^{er} \text{ ordre}} + \underbrace{\frac{1}{2} \left[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(A)h^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(A)hk + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(A)k^2 \right]}_{2^{nd} \text{ ordre}} + \|H\|^2 \varepsilon(H)$$

où $\lim_{H \rightarrow 0} \varepsilon(H) = 0$

$$\|H\|^2 = h^2 + k^2$$

A(1,1)

$$f(A) = 5$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(A) = 15$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(A) = 5$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(A) = 30$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(A) = 15$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(A) = 0$$

en H(h, k) quelconque

DL₂ f(A)

$$f(A+H) = 5 + 15h + 5k + \frac{1}{2} (30h^2 + 30hk + 0) + \|H\|^2 \varepsilon(H)$$

A(1,1) $\xrightarrow{+0,1}$ B(1,1; 1,1) écart de A à B: H=(0,1; 0,1)

$$f(1,1; 1,1) \simeq 5 + 15 \times 0,1 + 5 \times 0,1 + \frac{1}{2} (30 \times 0,01 + 30 \times 0,01)$$

valeur approchée → j'entève le reste

$$f(1,1; 1,1) \simeq 5 + 2 + 0,3 = 7,3.$$

$$f(1,1; 1,1) \simeq 7,3.$$